Causalité, bond-graphs et graphes informationnels causaux Quelques remarques

Philippe Fichou, UPSTI

Il faut bien reconnaître une forte similitude dans la terminologie employée par les créateurs des bond-graphs (BG) et par ceux des graphes informationnels causaux (GIC). On retrouve de manière identique les termes de résistances, gyrateurs, sources, variables énergétiques, éléments de stockage,… dans les deux formalismes. La distinction apparaît lorsque l'on traite de la causalité : la causalité dérivée n'existe pas dans les GIC et leur est même antinomique alors que son utilisation n'est pas interdite avec les BG.

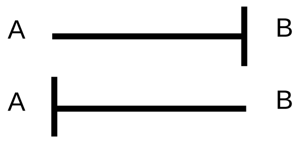
Revenons sur quelques définitions. Tout d'abord, nous prenons en compte, chronologie oblige, celles utilisées par les BG.

Afin de bien distinguer dans le graphique la partie « causalité » et transfert de puissance dans le symbolisme BG, je n'indiquerai pas, pour l'instant, la demi flèche (le « bond ») du lien BG. Ainsi,

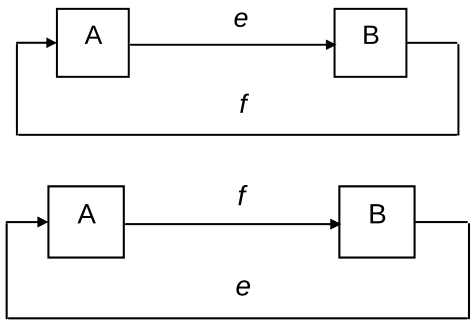
Lorsque deux sous-systèmes A et B échangent de la puissance, il existe deux situations :

- Le sous-système A impose un effort au sous-système B qui renvoie un flux à A.
- Le sous-système A impose un flux au sous-système B qui réagit par un effort sur A.

Ces deux situations se traduisent graphiquement et respectivement par



Ce qui peut être traduit respectivement sous forme de schéma-blocs par

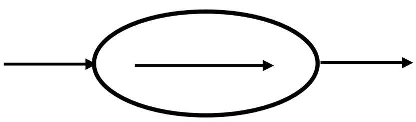


Dans le formalisme GIC, la causalité se définit de la manière suivante :

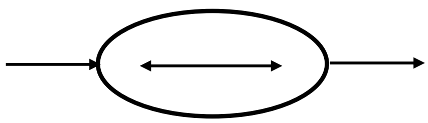
Une relation GIC est dite « causale » si la valeur de la grandeur énergétique influencée se déduit des valeurs actuelles et passées de la grandeur influente.

Une relation GIC est dite « rigide » si la grandeur influencée se déduit instantanément de la grandeur influente.

Les graphismes respectifs associés à ces deux relations sont :



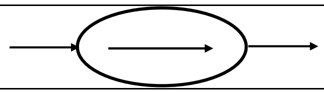
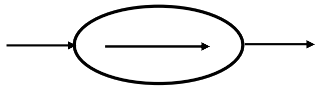
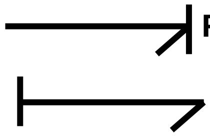
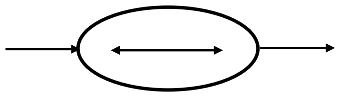
Relation causale



Relation rigide

Les deux graphes ci-dessus sont appelés des processeurs.

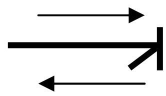
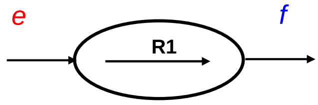
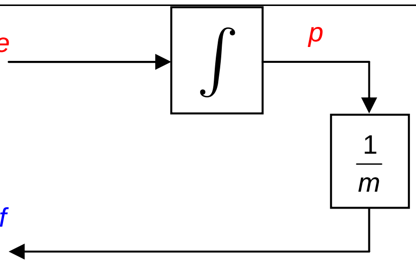
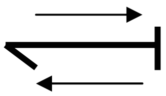
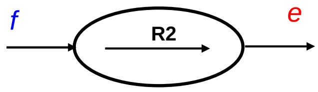
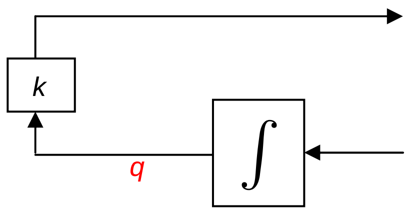
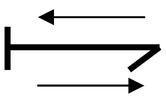
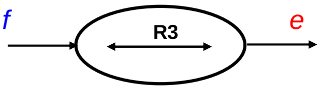
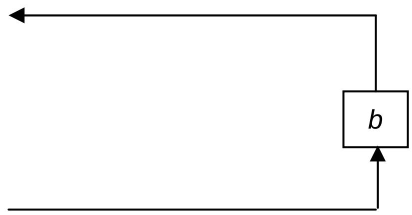
Grosso modo, si l'on ne s'intéresse qu'aux éléments (passifs) de stockage et dissipatif, on a la correspondance suivante entre les deux formalismes :

	Formalisme BG	Formalisme GIC	Exemples
Élément cinétique			Bobine, masse, inertie, liquide dans un tuyau,…
Élément potentiel			Condensateur, ressort, réservoir, enceinte thermique,…
Élément dissipatif			Résistance, frottement visqueux, restriction hydraulique,…

Remarquons que seuls les éléments BG en causalité intégrale ont été indiqués dans la seconde colonne, puisque la causalité dérivée n'existe pas dans le formalisme des GIC.

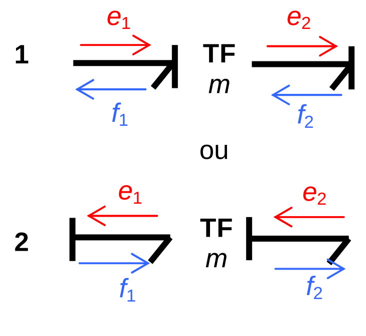
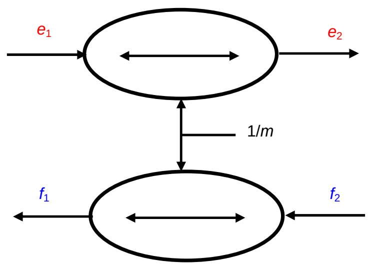
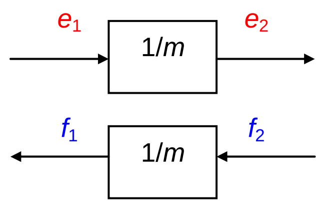
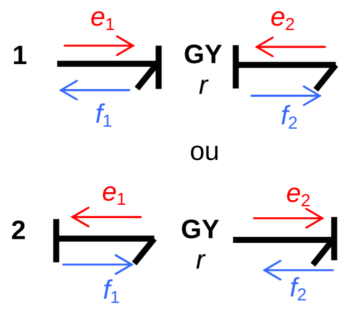
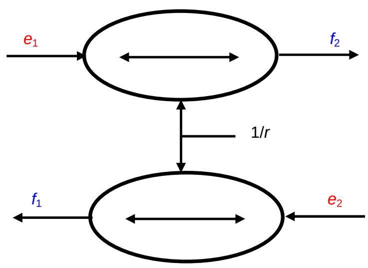
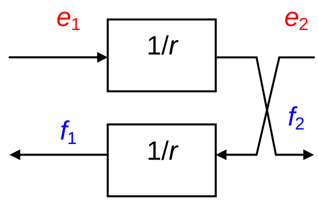
Une relation causale effort vers flux (GIC) représente une inertie (BG) et une relation flux vers effort (GIC) représente une capacité (BG). Une relation rigide entre un flux et un effort au sens de GIC est une résistance au sens des BG.

Une autre façon de traduire les éléments que nous venons de préciser est l'utilisation de schéma-blocs. Ainsi, pour les éléments mécaniques de translation (masse m, ressort de raideur k, frottement visqueux de facteur b) on a :

Élément BG	**Élément GIC**	**Schéma-blocs**
	 R1 : $\frac{df}{dt}=\frac{1}{m}e$ ou $f=\frac{1}{m}\int edt$	
	 R2 : $\frac{de}{dt}=kf$ ou $e=k\int fdt$	
	 R3 : $e=bf$	

Une différence importante apparaît entre les BG et les GIC concernant les « flèches » reliant les « processeurs ». Pour les derniers, la « flèche » représente un signal, c'est-à-dire une information unique comme pour les schéma-blocs. On peut d'ailleurs dire qu'un GIC est une autre forme (utile pour la commande des systèmes) d'un schéma-bloc. Pour ce qui concerne les BG la « demi flèche » est un lien de puissance « transportant » deux signaux dont le sens est fourni par la causalité du lien.

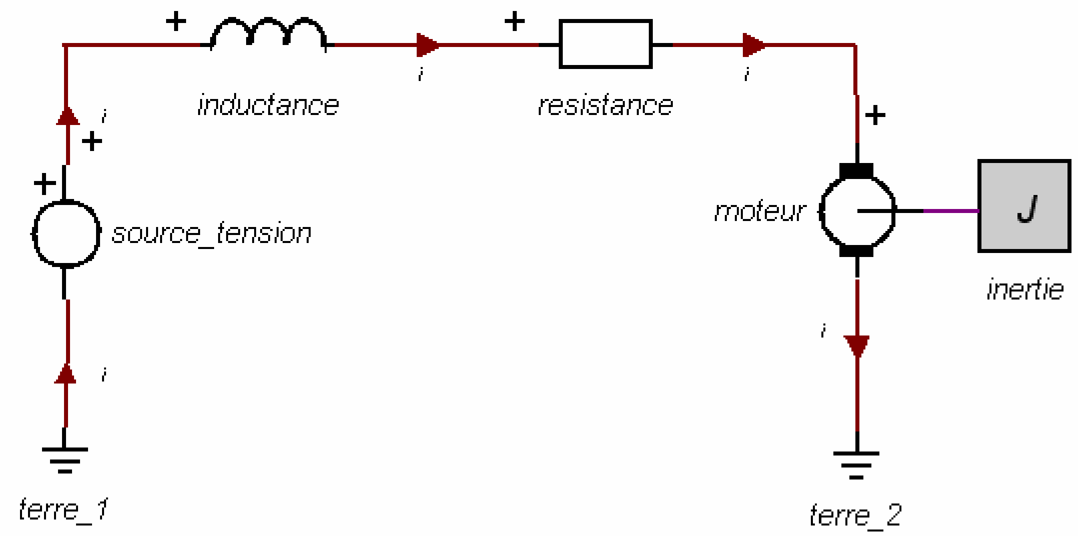
Complétons le tableau ci-dessus avec les éléments modulateur (ou transformateur) et gyrateur.

Élément BG	Élément GIC	Schéma-blocs
 suivant la causalité		 correspond au cas 1 du BG
 suivant la causalité		 correspond au cas 1 du BG

Exemple d'application classique : la machine à courant continu

On trouvera ci-dessous différents modèles et équations qui explicitent la machine à courant continu ; ce système ultra classique permet de montrer plusieurs approches possibles.

Schéma



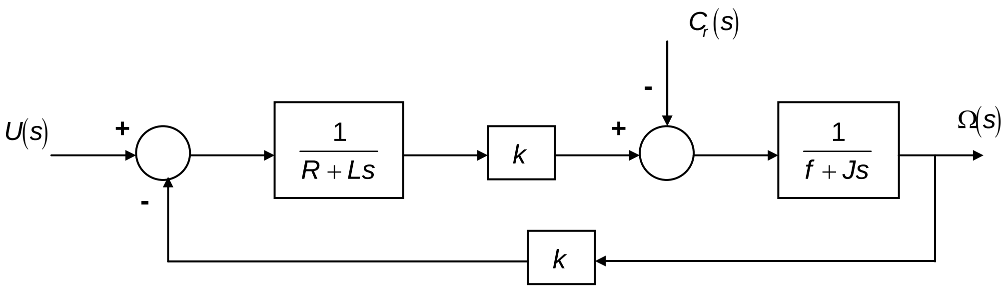
Équations différentielles

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$
$$c_m(t) - c_r(t) = f\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt}$$
$$c_m(t) = ki(t)$$
$$e(t) = k\omega(t)$$

Équations de Laplace

$$U(s) = E(s) + RI(s) + LsI(s)$$
$$C_m(s) - C_r(s) = f\Omega(s) + Js\Omega(s)$$
$$C_m(s) = kI(s)$$
$$E(s) = k\Omega(s)$$

Schéma-blocs



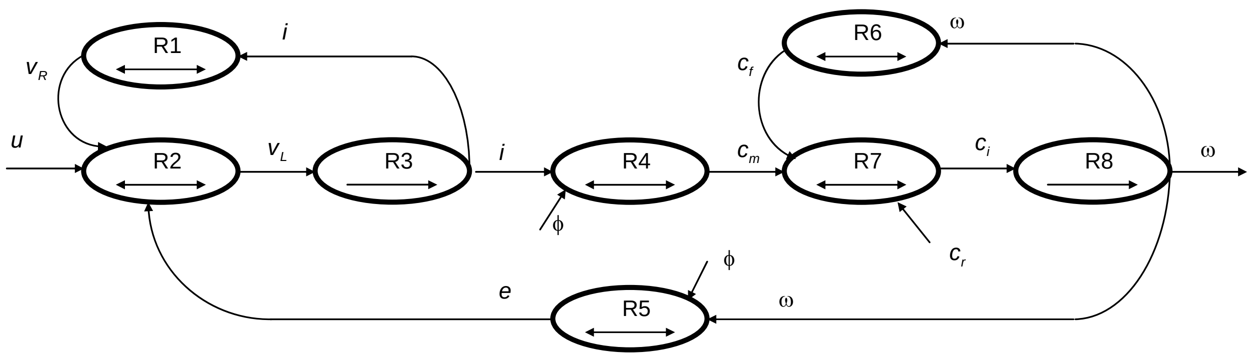
Fonction de transfert

$$\Omega(s) = \frac{k}{Rf + k^2 + (RJ + Lf)s + LJs^2}U(s) - \frac{R + Ls}{Rf + k^2 + (RJ + Lf)s + LJs^2}C_r(s)$$

Modèle d'état

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + [0]u$$

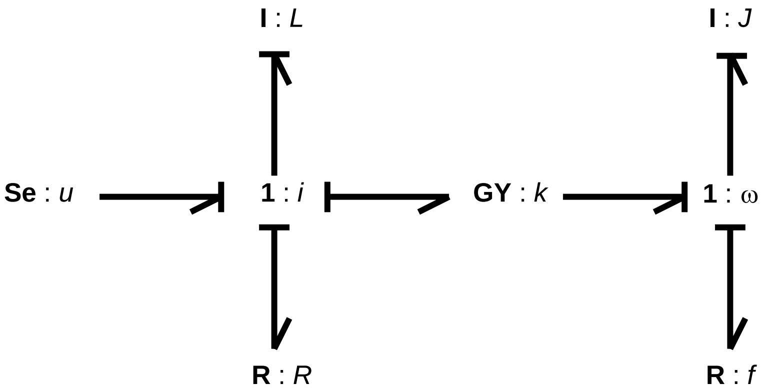
Graphe informationnel causal



Avec

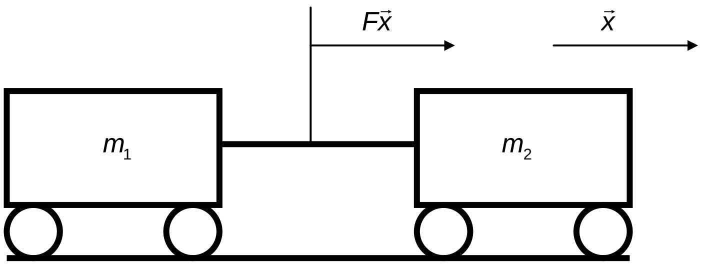
$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\text{R1: } v_R = Ri \\
\text{R2 : } v_L = u - v_R - e \\
\text{R3 : } v_L = L\dfrac{di}{dt} \\
\text{R4 : } c_m = ki \\
\text{R5 : } e = k\omega \\
\text{R6 : } c_f = f\omega \\
\text{R7 : } c_i = c_m - c_r - c_f \\
\text{R8 : } c_i = J\dfrac{d\omega}{dt} \\
\hline
\end{array}
$$

Bond Graph

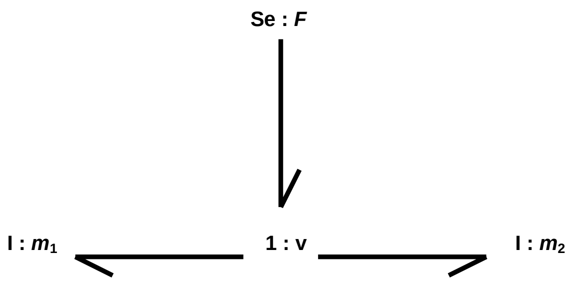


Petit exemple simple mais intéressant concernant la causalité dérivée (BG uniquement)

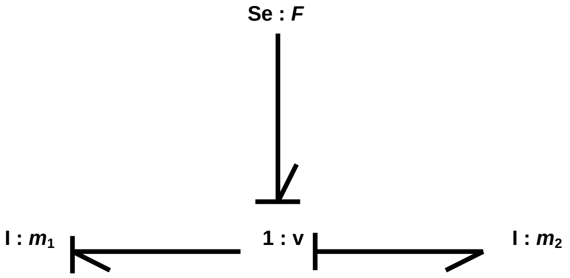
Soient deux solides supposés rigides reliés entre eux par une barre indéformable et soumis à un effort $F\vec{x}$ comme le présente le dessin ci-dessous. Les frottements sont négligés.



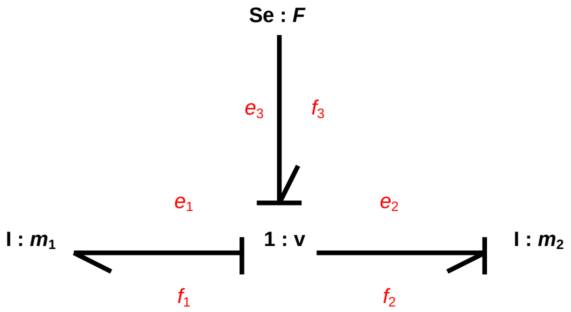
Le bond-graph (acausal) associé à cet exemple peut se tracer ainsi



Si l'on veut, par la procédure SCAP (Sequential Causality Assignment Procedure, procédure de mise en place systématique de la causalité sur un BG, réalisée automatiquement par les logiciels de simulation des BG), indiquer la causalité sur ce BG, nous avons deux possibilités :



ou



Nous constatons que nécessairement un élément de stockage d'énergie cinétique **I** est en causalité dérivée (la barre de causalité n'est pas du coté du **I**) puisque pour une jonction **1**, un seul flux peut être imposé.

Écrivons les équations du BG sur le second schéma, par exemple.

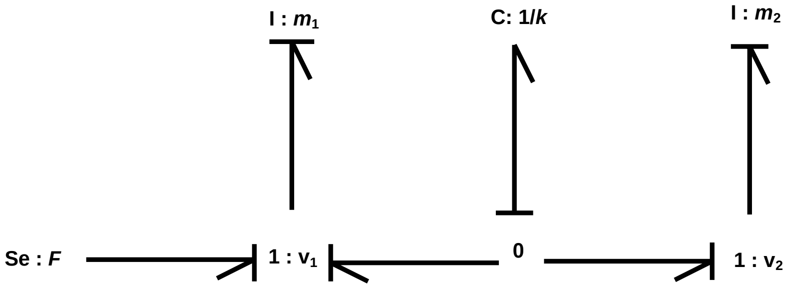
Jonction **1** : $\begin{aligned} f_1 = f_3 := f_2 = v \\ e_2 = e_3 - e_1 \end{aligned}$ source **Se** : $e_3 := F$ inertie $\mathbf{I_1}$: $\begin{aligned} \dot{p}_1 = e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m_1} p_1 \end{aligned}$ inertie $\mathbf{I_2}$: $\begin{aligned} \dot{p}_2 = e_2 \\ f_2 = \frac{1}{m_2} p_2 \end{aligned}$

Ce qui permet d'écrire (et de retrouver !) un résultat évident

$$\begin{aligned} e_2 &= e_3 - e_1 \\ m_2 \dot{f}_2 &= F - m_1 \dot{f}_1 \end{aligned} \qquad \boxed{\dot{v} = \frac{m_1 + m_2}{F}}$$

Commentons ce résultat : Il y a deux éléments de stockage, mais un seul est en causalité intégrale. La détermination de v s'obtient par l'équation différentielle du premier ordre ci-dessus qui ne nécessite qu'une seule condition initiale. Il existe pourtant deux éléments de stockage et, s'ils avaient été en causalité intégrale tous les deux auraient conduits à un système du second ordre nécessitant deux constantes d'intégration (deux variables d'état, donc). Ici, les deux éléments de stockage d'énergie ne sont pas indépendants. Sur le BG, à cause de la jonction **1**, la vitesse d'une des masses impose la vitesse de l'autre. Connaissant les masses des deux solides, la connaissance de l'énergie d'une d'entre elles détermine l'énergie de l'autre. Bien évidemment, nous aurions très bien pu remplacer les deux solides rigides et reliés rigidement par un seul solide de masse $m = m_1 + m_2$, mais nous n'aurions pas pu faire apparaître la causalité dérivée. Dans notre exemple, les manipulations algébriques étaient très simples. Ce n'est malheureusement pas le cas pour des problèmes industriels plus complexes. S'il est parfois possible de ne pas avoir d'éléments en causalité dérivée ou d'en diminuer le nombre, s'il en reste, il faut des solveurs adéquats pour traiter les équations algébro-différentielles induites par les causalités dérivées. Puisqu'il n'est pas toujours possible d'éviter ces causalités, il n'est pas toujours possible d'utiliser les GIC pour ce type de problème alors que le BG saura peut-être le résoudre (je dis peut-être, car tous les problèmes ne peuvent pas être traités par les BG comme, par exemple, les problèmes à paramètres non localisés conduisant à des équations aux dérivées partielles).

Le BG ci-dessous présente une solution rendant tout les éléments de stockage en causalité intégrale. Le nouveau modèle contient maintenant un élément **C** représentant la raideur du bras intermédiaire, celui-ci n'étant plus considéré maintenant comme rigide. Le traitement mathématique peut maintenant se faire sans aucune difficulté. L'ordre du modèle est maintenant de 3, non plus de 1 comme précédemment. Deux dynamiques ont été introduites.



Remarque concernant la notion de variable d'état

Les variables d'état caractérisent l'état d'un système au sens où leurs valeurs à l'instant zéro constituent les conditions initiales essentielles, c'est-à-dire dont la connaissance est nécessaire et suffisante pour qu'on puisse étudier l'évolution pour $t > 0$ d'un système dont on connaît l'équation différentielle. Le vecteur d'état est « la mémoire minimale » nécessaire pour la prédiction du comportement futur $x(t)$, qui dépend de $x(t_0)$, de t, de t_0, et de l'entrée entre t_0 et t. Le nombre minimal de variables d'état est l'ordre du modèle.

Le choix des variables d'état n'est pas unique. En BG, on choisit les variables d'énergie, p sur les **I** et q sur les **C**, mais on peut aussi choisir les variables de puissance regroupées dans le vecteur d'état complémentaire noté $Z = F(x)$ qui sont les flux sur les **I** et les efforts sur les **C**. Ces variables sont appelées « variables de co-énergie ». L'ordre du modèle est le nombre d'éléments **I** et **C** en causalité intégrale. S'il y a des éléments **I** ou **C** en causalité dérivée, les variables p ou q qui leur sont associées sont aussi à prendre en compte dans le vecteur d'état car ces éléments stockent de l'énergie, mais ces variables ne sont pas indépendantes et dans ce cas la dimension de x n'est plus minimale, le modèle d'état se présente sous forme d'équations algébro-différentielles (autant d'équations différentielles que de variables d'état indépendantes, donc que de **I** et **C** en causalité intégrale, (on retrouve l'ordre du modèle) et autant d'équations algébriques que de **I** ou **C** en dérivée). Ces notions de variables d'état indépendantes et dépendantes sont en général absentes des autres outils de modélisation (ce n'est pas géré par les GIC qui cherchent à contourner le problème quand il se présente).