Du bond graph à la fonction de transfert

Nous présentons ici la méthode pour obtenir la fonction de transfert – FT – (ou matrice de transfert dans le cas d'un bond graph – BG – multi entrées, multi sorties) par une analyse structurelle du BG. Les FT s'obtiennent en parcourant la causalité du BG comme on le verra par la suite.

Les définitions ci-dessous sont celles données dans [1] ou [2].

Définition 1 – *Chemin causal* : Un chemin causal dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens et d'éléments de base, appelés ici « nœuds », telle que :

– tous les nœuds ont une causalité complète et correcte ;
– deux liens du chemin causal ont en un même nœud des orientations causales opposées.

Définition 2 – *Chemin causal simple* : Un chemin causal est simple s'il est parcouru en suivant toujours la même variable. Il existe donc dans une même séquence de liens et de noeuds, deux chemins en suivant soit l'effort, soit le flux, comme le montre la figure 1.

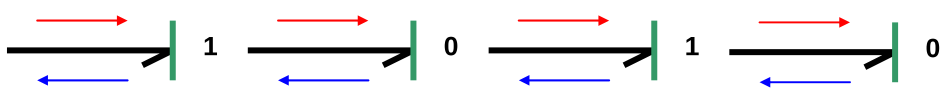

Figure 1 : chemin causal simple

Remarque : la flèche au-dessus du lien BG représente la variable effort. La flèche en dessous la variable flux.

Définition 3 – *Chemin causal mixte* : Un chemin causal est mixte direct si son parcours comporte un gyrateur imposant le changement de variable suivie (figure 2). Un chemin causal est mixte indirect s'il passe par un élément passif R, I ou C (figure 3).

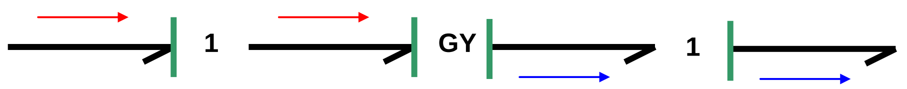

Figure 2 : chemin causal mixte direct

Élément passif

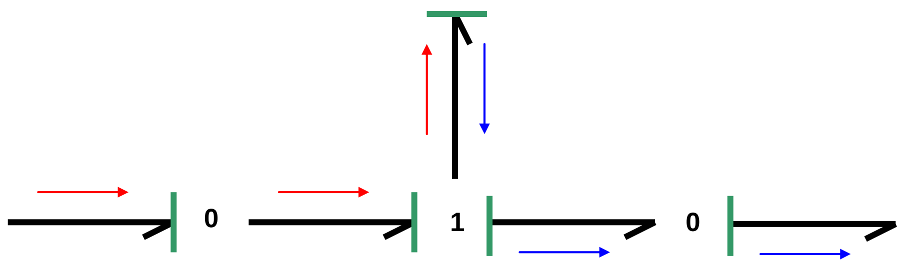

Figure 3 : chemin causal mixte indirect

Définition 4 – *Boucle causale* : Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments passifs sans lien parcouru en suivant la même variable plus d'une fois (figure 4).

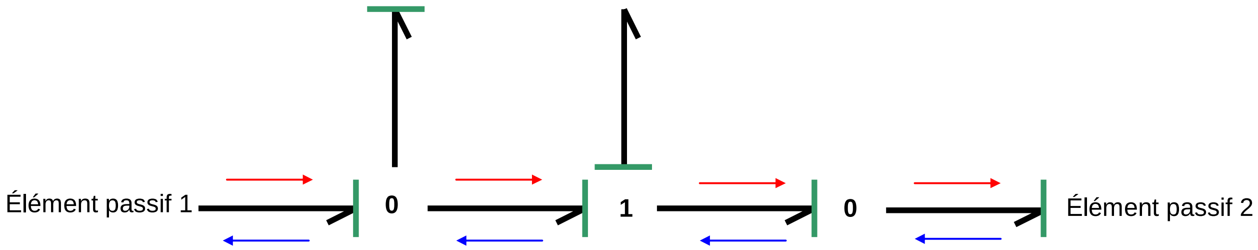

Figure 4 : boucle causale

Définition 5 – *Chaîne d'action* : Une chaîne d'action est un chemin causal entre une source et une sortie ou un détecteur.

Définition 6 – Deux boucles causales sont disjointes si elles n'ont ni lien ni jonction en commun parcourus en suivant le même type de variable.

Définition 7 – *Gain d'un chemin causal* : Dans le cas linéaire, le gain d'un chemin causal est la fonction liant la variable d'entrée origine du chemin à la variable de sortie extrémité du chemin.

Définition 8 – *Gain d'une boucle causale* : Dans le cas linéaire, le gain d'une boucle causale est le produit des gains des éléments de la boucle.

Les relations suivantes permettent le calcul de ce gain pour les trois types de chemins causaux.

– Pour les chemins causaux simples ou mixtes directs

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i m_i^{k_i} \prod_j r_j^{l_j} \qquad (1)$$

– Pour les chemins causaux mixtes indirects

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i m_i^{k_i} \prod_j r_j^{l_j} \prod_e g_e \qquad (2)$$

– Pour les boucles causales

$$B = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i \left(m_i^2\right)^{k_i} \prod_j \left(r_j^2\right)^{l_j} \prod_e g_e \qquad (3)$$

Dans lesquelles

n_0 : nombre de changements d'orientation aux jonctions 0 quand on suit la variable flux.
n_1 : nombre de changements d'orientation aux jonctions 1 quand on suit la variable effort.
m_i : module de l'élément **TF$_i$** traversé avec $k_i = \pm 1$ suivant le type de causalité appliquée au transformateur.
r_j : module de l'élément **GY$_j$** traversé avec $l_j = \pm 1$ suivant le type de causalité appliquée au gyrateur.
g_e : gain de l'élément passif e traversé suivant le tableau ci-après.

Élément	Type de causalité	Gain
R	résistance	R
	conductance	$\frac{1}{R}$
C	intégrale	$\frac{1}{Cs}$
	dérivée	Cs
I	intégrale	$\frac{1}{Is}$
	dérivée	Is

Tableau 1 : Gains des éléments passifs

Règle de Mason pour un système à une entrée et une sortie : Soient u l'entrée et y la sortie du système. La fonction de transfert a pour expression

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\sum_k T_k(s)\Delta_k(s)}{\Delta(s)}$$

Dans laquelle

$$\Delta(s)=1-\sum_i B_i+\sum_{i,j} B_iB_j-\sum_{i,j,k} B_iB_jB_k+\ldots$$

$\sum_i B_i$: somme des gains des boucles causales entre deux éléments passifs, prises une à une.

$\sum_{i,j} B_iB_j$: somme des produits 2 à 2 des gains des boucles causales disjointes.

$\sum_k T_k(s)$: gain de la k^{e} chaîne d'action.

$\Delta_k(s)$: se calcule de la même manière que $\Delta(s)$ quand on a enlevé du BG la k^{e} chaîne d'action.

Cette règle se généralise aisément aux matrices de transfert

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \ldots \\ Y_p(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \ldots & N_{1m}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{p1}(s) & \ldots & N_{pm}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \ldots \\ U_p(s) \end{bmatrix}$$

Application 1 : Circuit RLC série

Bond graph du circuit

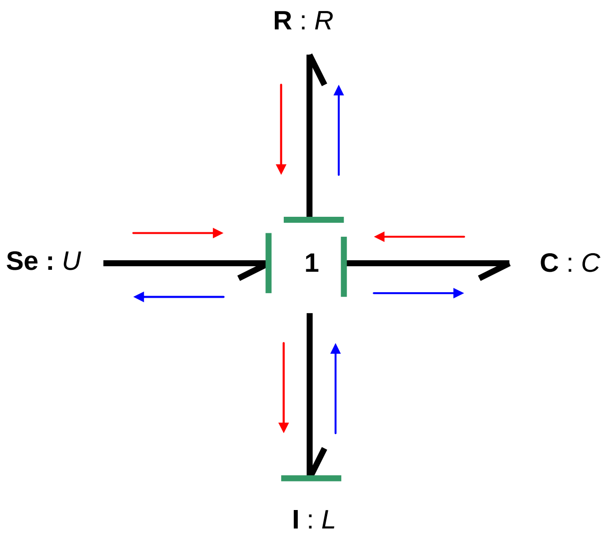

Figure 5 : BG du circuit RLC série

Boucles causales	Gains des boucles
R : R – **I** : L	$B_1=-R\frac{1}{Ls}$
C : C – **I** : L	$B_2=-\frac{1}{Cs}\frac{1}{Ls}$

Tableau 2 : Boucles causales du BG du circuit RLC série

Les boucles ne sont pas disjointes.

On en déduit la valeur de $\Delta(s)$

$$\Delta(s)=1-\left(-\frac{R}{Ls}-\frac{1}{LCs^2}\right)$$

On veut déterminer la fonction de transfert $H(s)=\dfrac{U_C(s)}{U(s)}$ entre la tension appliquée au circuit et la tension aux bornes du condensateur.

Le gain de la chaîne d'action vaut $T_1(s)=\dfrac{1}{Ls}\dfrac{1}{Cs}=\dfrac{1}{LCs^2}$. Il n'y a plus de boucle causale si l'on enlève la chaîne d'action de notre circuit : $\Delta_1=1$.

On en déduit la fonction de transfert

$$\boxed{H(s)=\frac{U_C(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{1}{LCs^2}}{1+\dfrac{R}{Ls}+\dfrac{1}{LCs^2}}=\frac{1}{1+RCs+LCs^2}}$$

Application 2 : Machine à courant continu

Bond graph de la MCC

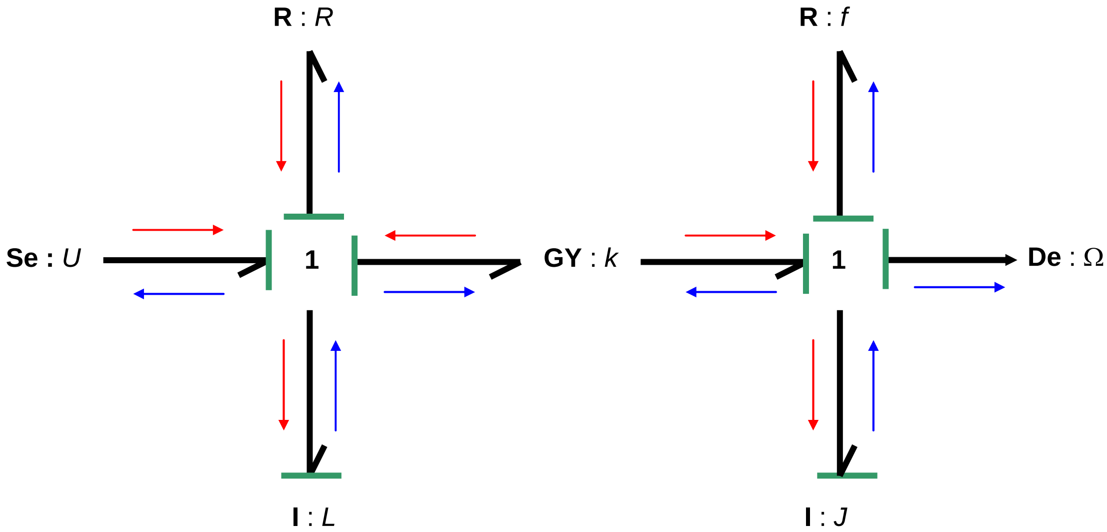

Figure 6 : BG de la MCC

Boucles causales	Gains des boucles
$\mathbf{R}:R-\mathbf{I}:L$	$B_1=-R\dfrac{1}{Ls}$
$\mathbf{R}:f-\mathbf{I}:J$	$B_2=-f\dfrac{1}{Js}$
$\mathbf{I}:L-\mathbf{I}:J$	$B_3=(-1)^{0+1}\dfrac{1}{Ls}\dfrac{1}{Js}k^2$

Tableau 3 : Boucles causales du BG de la MCC

Les boucles ne sont pas disjointes.
On en déduit la valeur de $\Delta(s)$.

$$\Delta(s)=1-\left(-\frac{R}{Ls}-\frac{f}{Js}-\frac{k^2}{LJs^2}\right)$$

On veut déterminer la fonction de transfert $H(s)=\dfrac{\Omega(s)}{U(s)}$ entre la tension appliquée au circuit et la tension aux bornes du condensateur.

Le gain de la chaîne d'action vaut $T_1(s)=\dfrac{1}{Ls}k\dfrac{1}{Js}=\dfrac{k}{LJs^2}$. Il n'y a plus de boucle causale si l'on enlève la chaîne d'action de notre circuit : $\Delta_1=1$.

On en déduit la fonction de transfert

$$\boxed{H(s)=\frac{\Omega(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{k}{LJs^2}}{1+\dfrac{R}{Ls}+\dfrac{f}{Js}+\dfrac{k^2}{LJs^2}}=\frac{k}{k^2+(RJ+Lf)s+LJs^2}}$$

Application 3 : Deux réservoirs

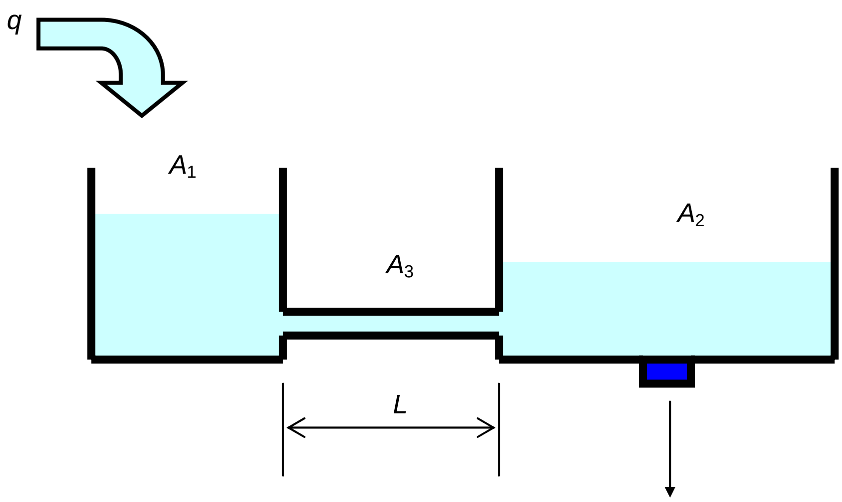

Figure 7 : Système à deux réservoirs

Soit un fluide de masse volumique ρ se déversant dans le réservoir cylindrique 1 de section A_1 avec un débit volumique q. Ce réservoir est relié au réservoir 2 de section A_2 par un tuyau de section A_3 et de longueur L. Les pertes de charges sont modélisées par une résistance R_1 pour les restrictions du tube et R_2 pour la fuite. Le BG du modèle est donné.

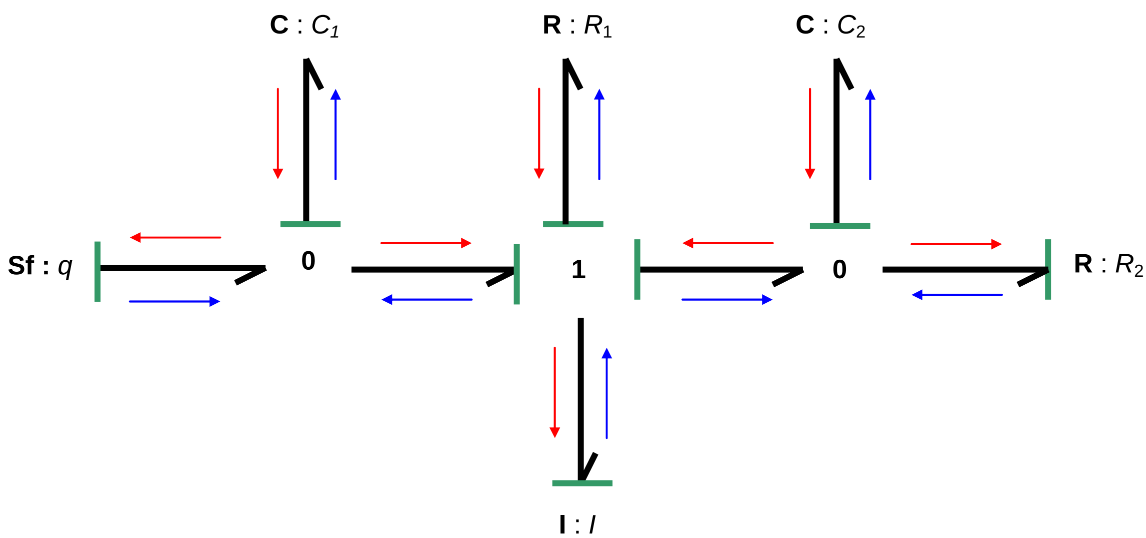

Figure 8 : BG du système à deux réservoirs

Déterminons la fonction de transfert $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{Q(s)}$ entre le débit pénétrant dans le réservoir 1 et le volume de fluide dans le réservoir 2.

Boucles causales	Gains des boucles
C : C_1 – **I** : I	$B_1=-\dfrac{1}{C_1 s}\dfrac{1}{Is}$
R : R_2 – **C** : C_2	$B_2=-\dfrac{1}{R_2}\dfrac{1}{C_2 s}$
R : R_1 – **I** : I	$B_3=-R_1\dfrac{1}{Is}$
C : C_2 – **I** : I	$B_4=-\dfrac{1}{Is}\dfrac{1}{C_2 s}$

Tableau 4 : Boucles causales du BG du système à deux réservoirs

Les boucles 1 et 2 d'une part et 2 et 3 d'autre part sont disjointes.
On en déduit la valeur de $\Delta(s)$.

$$\Delta(s)=1-\left(-\frac{1}{C_1Is^2}-\frac{1}{R_2C_2s}-\frac{R_1}{Is}-\frac{1}{C_2Is^2}\right)+\left(\frac{1}{R_2C_2Is^2}+\frac{R_1}{R_2C_1C_2Is^3}\right)$$

Le gain de la chaîne d'action vaut $T_1(s)=\dfrac{1}{C_1s}\dfrac{1}{Is}\dfrac{1}{C_2s}=\dfrac{1}{C_1C_2Is^3}$. Il n'y a plus de boucle causale si l'on enlève la chaîne d'action de notre circuit : $\Delta_1=1$.

$$\boxed{\begin{aligned}H(s)=\frac{V_2(s)}{Q(s)}&=\frac{\dfrac{1}{C_1C_2Is^3}}{1+\dfrac{1}{C_1Is^2}+\dfrac{1}{R_2C_2s}+\dfrac{R_1}{Is}+\dfrac{1}{C_2Is^2}+\dfrac{1}{R_2C_2Is^2}+\dfrac{R_1}{R_2C_1C_2Is^3}}\\&=\frac{\dfrac{1}{C_1C_2I}}{\dfrac{R_1}{R_2C_1C_2I}+\left(\dfrac{1}{C_1I}+\dfrac{1}{C_2I}+\dfrac{1}{R_2C_2I}\right)s+\left(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{R_1}{I}\right)s^2+s^3}\end{aligned}}$$

Déterminons maintenant la fonction de transfert $H_2(s)=\dfrac{V_1(s)}{Q(s)}$ entre le débit pénétrant dans le réservoir 1 et le volume de fluide dans le réservoir 1.

$\Delta(s)$ ne change pas, bien évidemment.

Le gain de la chaîne d'action vaut $T_2(s)=\dfrac{1}{C_1s}$. Il reste trois boucles causales quand on enlève cette chaîne d'action (les boucles 2, 3 et 4). Le déterminant $\Delta_2(s)$ vaut

$$\Delta_2(s)=1-\left(-\frac{1}{R_2C_2s}-\frac{R_1}{Is}-\frac{1}{C_2Is^2}\right)+\left(\frac{1}{R_2C_2Is^2}\right)$$

On en déduit la fonction de transfert

$$\boxed{H_2(s)=\frac{V_1(s)}{Q(s)}=\frac{\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{C_2I}+\dfrac{1}{R_2C_2I}+\left(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{R_1}{I}\right)s+s^2\right)}{\dfrac{R_1}{R_2C_1C_2I}+\left(\dfrac{1}{C_1I}+\dfrac{1}{C_2I}+\dfrac{1}{R_2C_2I}\right)s+\left(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{R_1}{I}\right)s^2+s^3}}$$

Bibliographie

[1] G. Dauphin-Tanguy : Les bond graphs, Hermès, 2000 ;

[2] G. Dauphin-Tanguy : Les bond graphs en mécatronique, Les Techniques de l'Ingénieur n° S7222 ;

[3] M. Vergé & D. Jaume : Modélisation structurée des systèmes avec les Bond Graphs, Technip, 2004 ;

[4] D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. G. Rosenberg : System Dynamics, Wiley-interscience, 3rd edition, 2000 ;

[5] G. Gandanegara : Méthodologie de conception systémique en Génie Électrique à l'aide de l'outil Bond Graph. Application à une chaîne de traction ferroviaire, Thèse INP Toulouse, 2003 ;