

Modéliser les systèmes par langage graphique Éléments de Bond Graph

Philippe Fichou • IA - IPR - Académie de Reims

L'idée principale pour comprendre et étudier la dynamique des systèmes réels est la modélisation de ces derniers. Les modèles sont des constructions abstraites et simplifiées utilisées pour prévoir le comportement du réel. On connaît également, tous, les modèles physiques concrets construits à partir des techniques de l'analyse dimensionnelle comme par exemple les maquettes d'avions essayées en souffleries ou encore celles de bateaux testées en bassin d'essai de carènes. Aujourd'hui les simulations sur ordinateurs ont permis de s'affranchir parfois de la construction de telles maquettes physiques et l'on sait représenter, par exemple, les systèmes mécaniques à l'aide de maquettes numériques que l'on peut ensuite « expérimenter » grâce à de nombreux logiciels de simulations. Une méthode prédomine dans les bureaux d'études : il s'agit de la méthode des éléments finis qui permet la résolution des équations aux dérivées partielles issues des principes fondamentaux en « découpant » le milieu continu en éléments discrets dont les lois de comportements sont connues, et qui sont reliés entre eux par des « nœuds ». La résolution, grâce à l'ordinateur, du système matriciel obtenu permet d'accéder aux

valeurs des simulations réalisées (calculs de structures mécaniques, simulation d'interactions fluide/structures, évolution de phénomènes thermomécaniques, ...). Ces méthodes permettent l'obtention d'une connaissance précise des phénomènes. Elles ont cependant souvent l'inconvénient d'un coût élevé (temps de modélisation et de calcul importants) et sont limitées à l'étude d'un ou de deux domaines physiques ou technologiques.

Une autre possibilité de modélisation, moins fine que la précédente, est l'ensemble des méthodes dites « à paramètres localisés » comme par exemple celles des bond graphs. **Il s'agit d'un langage graphique basé sur des analogies et les échanges énergétiques dans les systèmes.** On cherche ici à localiser les phénomènes se produisant dans le système technique dans lequel, par exemple, plusieurs domaines physiques sont présents (électrique, chimique, thermique, mécanique, ...). Puisqu'il est basé sur les flux d'énergies et d'informations, il permet l'étude de la structure interne du système. Il est alors possible de mettre en évidence les parties et sous-systèmes de l'ensemble envisagé ainsi que la manière dont ceux-ci interagissent entre eux et cela sous forme

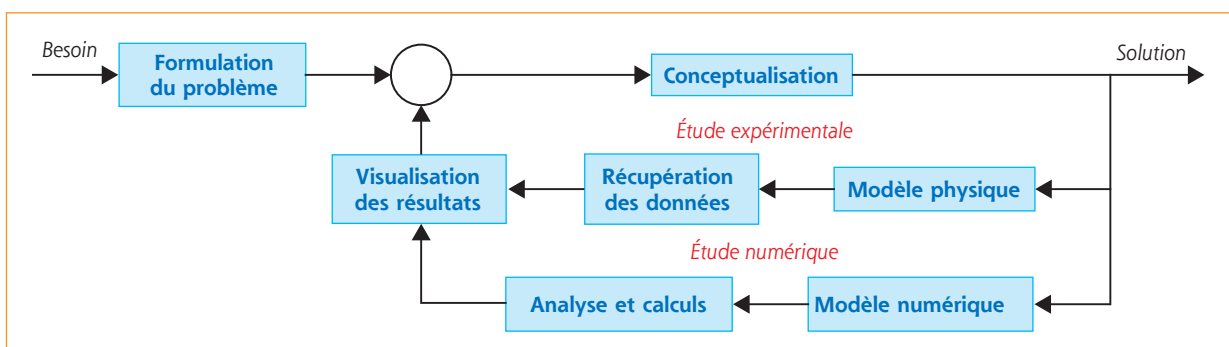


Figure 1 : le processus de conception

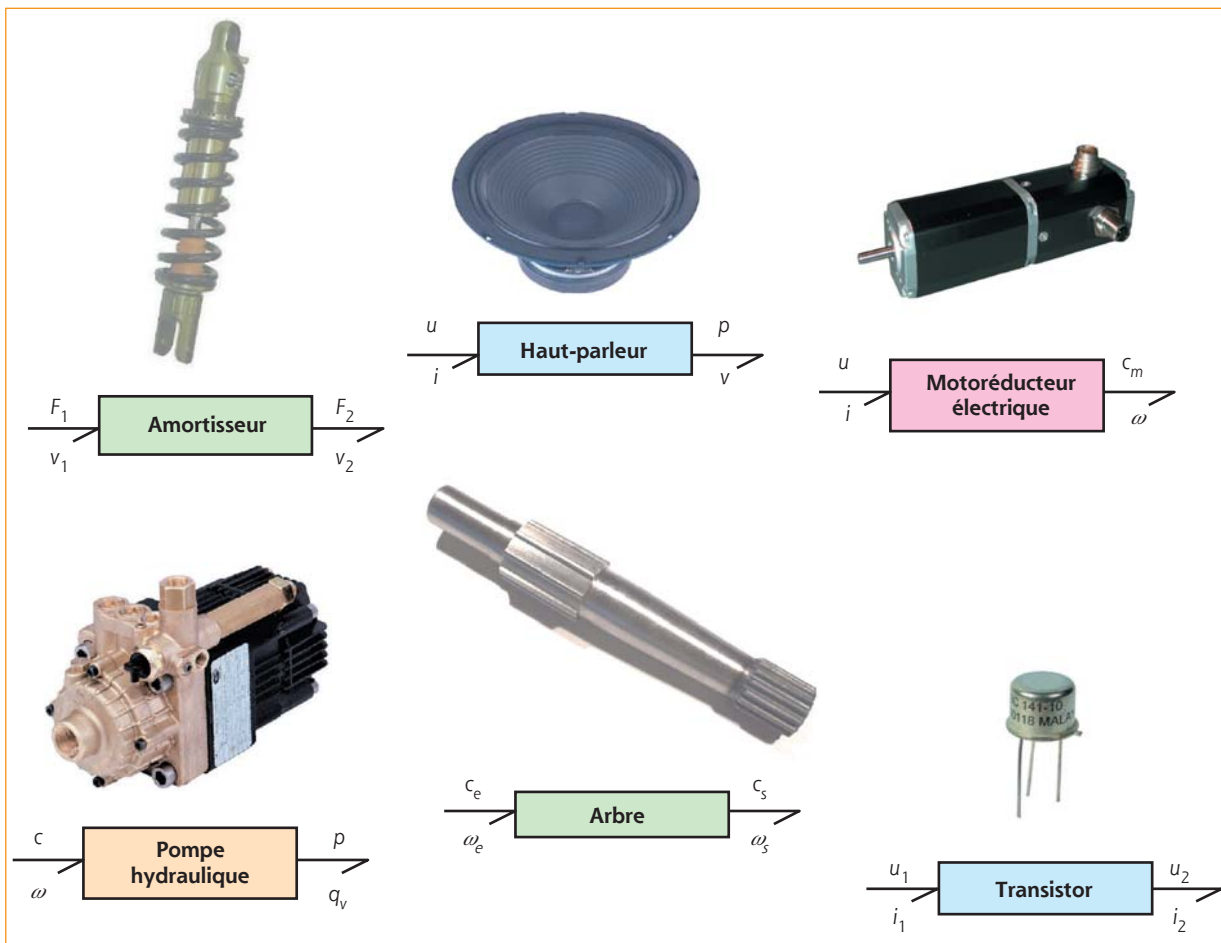


Figure 2 : point de vue fonctionnel, sous-systèmes

graphique souvent bien plus parlante que les équations issues de l'application des principes physiques fondamentaux. La précision des résultats obtenus est, dans un bon nombre de cas, suffisante pour les études et conceptions, et les temps de modélisation et de calculs sont plus raisonnables que pour les méthodes de type « éléments finis ».

On rappelle *figure 1* les principales phases du processus de conception et de modélisation lors de la résolution d'un problème technologique.

La première étape de la modélisation consiste à diviser le système en composants de frontières bien définies et d'identifier leurs entrées/sorties. La *figure 2* montre des exemples de tels sous-systèmes bien connus. Elle indique également les variables groupées par paires « duales » au sens où leurs produits ont pour résultat une puissance. Certains de ces sous-systèmes peuvent être reliés entre eux : le motoréducteur électrique, l'arbre et la pompe, par exemple, ou encore le transistor et le haut-parleur. On appelle « port » l'interface de connexion d'un sous-système : les cannelures de l'arbre, les fils électriques du moteur, les axes de l'amortisseur, ... Il existe

des systèmes à un seul port « 1-port », les systèmes à deux ports « 2-ports » et des systèmes à plus de deux ports « n -ports ». Quand les ports des sous-systèmes sont connectés, le flux de puissance qui s'échange alors entre eux est le produit de variables de puissance P qui est l'une de type « effort généralisé » e (force, couple, pression, tension, température, ...) et l'autre de type « flux généralisé » f (vitesse, taux de rotation, débit volumique, intensité, flux de chaleur, ...). On aura à tout instant :

$$P(t) = e(t) \times f(t)$$

Une représentation fonctionnelle de l'association de sous-systèmes peut être exprimée par le schéma de la *figure 3*. Les liens (demi-flèche) entre les composants sont de type « liens de puissance » et non pas signaux comme dans les schéma-blocs, par exemple. Un lien de puissance « transporte » une puissance donc deux variables (e et f) qui sont indiquées sur (l'effort généralisé) et sous (le flux généralisé) le lien (bond, en anglais). Le schéma fonctionnel obtenu se nomme « bond graph à mots » et permet de connaître la façon dont le flux énergétique circule mais aussi le type de variables généralisées utilisées. Un exemple est proposé à la *figure 4*.

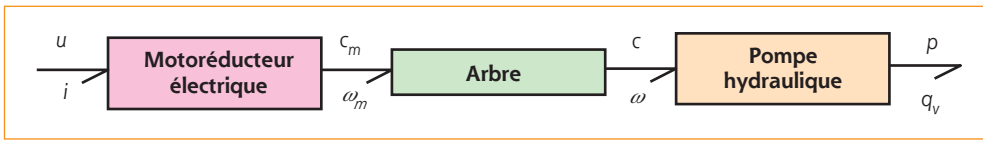


Figure 3 : point de vue fonctionnel, bond graph à mots

Premiers éléments de la construction graphique : sources et résistances

Les concepteurs du langage Bond Graph (BG) ont mis en évidence 9 éléments de base pouvant décrire un nombre important de phénomènes. Il sera possible d'ajouter de nouveaux éléments lorsque les phénomènes seront plus complexes notamment lors de la prise en compte d'effets thermodynamiques, magnétiques ou chimiques.

Prenons l'exemple électrique suivant d'un générateur de tension sur lequel est branchée une résistance électrique pure (figure 5). Nous ne nous intéressons pas aux phénomènes thermiques dus à la dissipation d'énergie par la résistance. Le BG de ce circuit est représenté. Il fait apparaître le générateur de tension (source d'effort **Se** supposée constante ici, e) et la résistance R (élément dissipatif **R**). La demi-flèche est dirigée de manière conventionnelle du générateur vers le récepteur. La source d'effort et l'élément dissipatif sont des éléments « 1-port » car chacun d'entre eux est relié à l'extérieur par une seule entrée-sortie. Les variables de puissance transitant dans

le système sont la tension électrique (effort généralisé) et le courant électrique (flux généralisé). La source d'effort est caractérisée par le fait qu'elle fournit un effort indépendant du flux circulant dans le circuit ; c'est elle qui impose ici la tension électrique aux bornes de la résistance. Ici, le générateur de tension impose une différence de potentiel u aux bornes de la résistance qui réagit en faisant s'écouler un courant dans le circuit. Pour la résistance, u est une entrée d'action et i une sortie de réaction. C'est une loi causale que l'on peut écrire : $i := \frac{1}{R} u$ (le symbole $:=$ signifiant ici que i est la conséquence et u la cause du phénomène étudié).

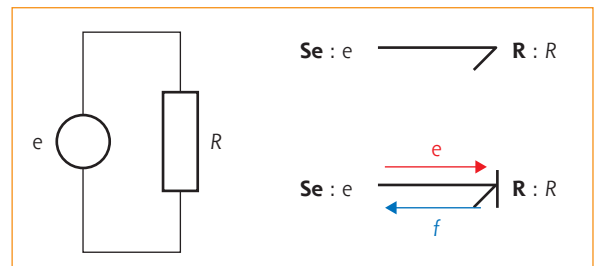


Figure 5 : circuit électrique élémentaire

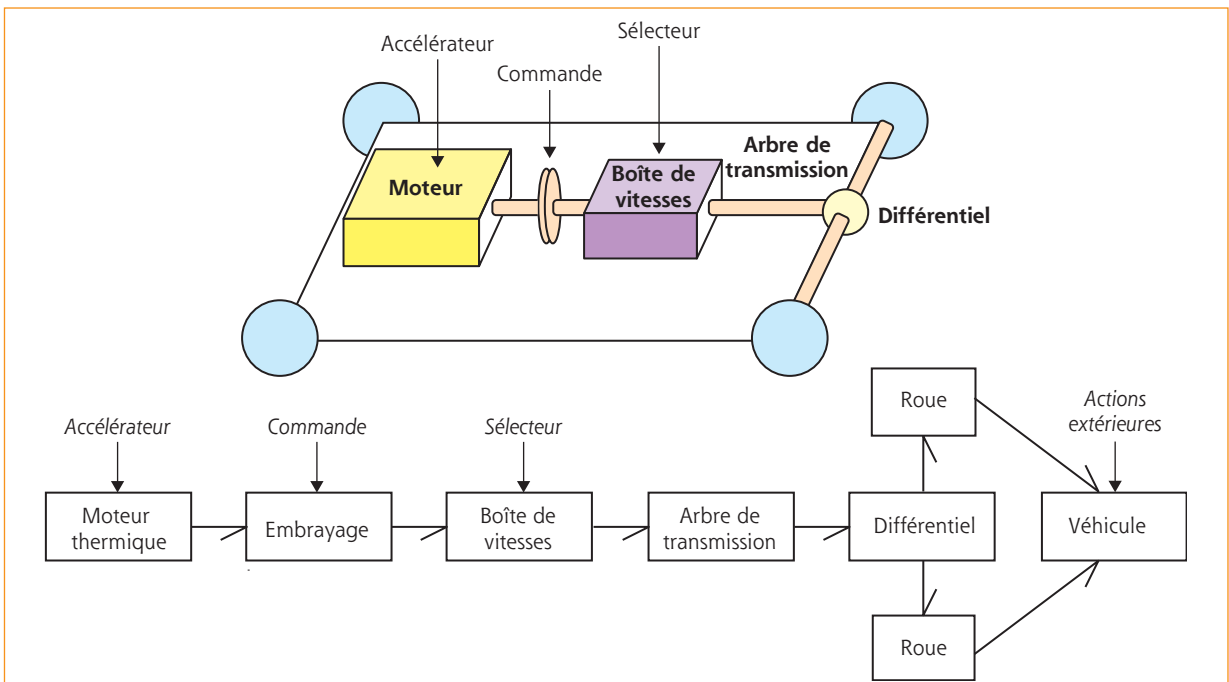
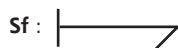


Figure 4 : bond graph à mots d'un modèle simple de véhicule

On complète alors le BG initial dit acausal par un petit segment perpendiculaire au lien de puissance qui signifie que l'effort est imposé du côté du lien où il est tracé. Sur le second BG sont représentées les deux variables de puissance ainsi que leur sens qui indique la causalité des phénomènes. Le sens des flèches – donc la causalité – traduit le phénomène action/réaction dans le sens où une tension appliquée aux bornes d'une résistance réagit en laissant passer un courant et en dissipant de l'énergie sous forme de chaleur.

Parmi les sources d'effort nous trouvons par exemple, les phénomènes de gravité, les sources de chaleur à température imposée, les générateurs de pression hydraulique, ...

De la même manière qu'il y a des sources d'effort, il existe également des sources de flux notées **Sf** qui imposent le flux généralisé à l'élément auquel elle est reliée. Un générateur de courant, une pompe hydraulique sont des exemples de telles sources. Elles imposent le flux à l'élément auquel elle est assemblée. On aura alors nécessairement :



La causalité (sens de variables généralisées) est donc imposée par les éléments actifs de type « source ». Dans notre exemple, la source d'effort est supposée constante de valeur e .

Le langage des BG permet la représentation de sources modulées par une information ou une commande. On a alors les éléments **MSe** et **MSf** qui sont respectivement des sources d'effort et de flux modulées dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :



La flèche représente un lien d'information pouvant, par exemple, provenir d'une commande. Pour un tel lien, on suppose la puissance transmise négligeable par rapport à la puissance circulant dans le système.

Nous avons également fait apparaître dans notre exemple l'élément passif dissipatif **R** que l'on retrouve dans les phénomènes physiques. Cet élément peut être linéaire ou non linéaire. Nous avons par exemple, les phénomènes de frottement fluide ou sec, ou les variations de section dans les circuits de fluide. Dans le cas linéaire, par exemple, la différence de pression P lors du passage d'un fluide en écoulement laminaire de viscosité dynamique μ dans un tube de rayon a et de longueur L est donnée, si q est le débit volumique, par :

$$P = Rq \quad \text{avec} \quad R = \frac{8\mu}{\pi a^2}$$

Dans le cas non linéaire d'une modélisation d'un fluide turbulent traversant un orifice, on montre en mécanique des fluides que la différence de pression traversant un orifice est une fonction du débit telle que :

$$p = \frac{\rho}{2cA^2} q^2$$

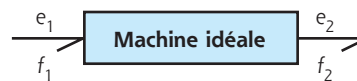
si ρ est la masse volumique du fluide, c est le coefficient de contraction de l'orifice et A la section de ce dernier. Dans les deux cas le modèle BG du phénomène de perte d'énergie est modélisé par l'élément **R**. La causalité d'un élément linéaire **R** est indifférente car elle relie directement une variable effort généralisé à une variable flux généralisé sans intégration ni dérivation :



Le premier cas de causalité est appelé « causalité résistance », le second cas « causalité conductance ».

Les deux « machines » idéales : transformateurs et gyrateurs

Une « machine idéale » est un système dans lequel on néglige les pertes d'énergie. Il existe deux types génériques de tels éléments le transformateur et le gyrateur dont le BG à mots peut être représenté par :



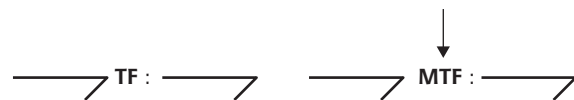
Ce sont des éléments à 2 ports (2 liens « reliés » à la machine).

La conservation de l'énergie impose donc $e_1 f_1 = e_2 f_2$. Le sens des liens de puissance peut être inversé ce qui traduit la réversibilité thermodynamique de ce type d'éléments (pas de création d'entropie).

Outre la conservation de la puissance, si l'on appelle m son module, un **transformateur** vérifie les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 &= m e_2 \\ f_2 &= m f_1 \end{aligned}$$

Le module peut être constant ou variable. Dans ce dernier cas, le transformateur est un transformateur modulé. Les deux symboles possibles sont alors :



Pour ce qui concerne la causalité de ce type d'éléments, si l'effort est imposé à son entrée, alors le flux est imposé à sa sortie et réciproquement. On a ainsi :



Les exemples de ce type d'éléments sont nombreux (figure 6).

L'autre « machine idéale » est le **gyrateur** qui, à l'instar du transformateur, conserve la puissance. Si l'on appelle r le module d'un gyrateur, celui-ci vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ e_2 &= r f_1 \end{aligned}$$

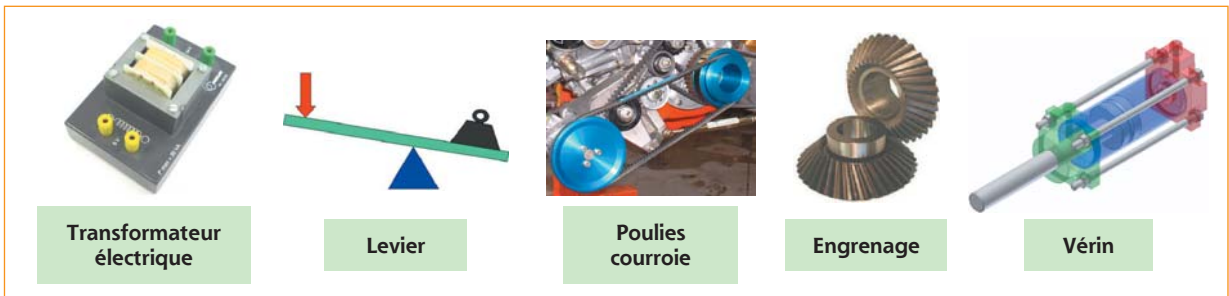
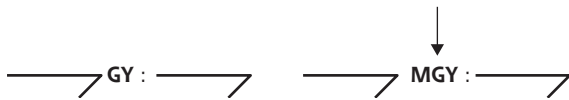


Figure 6 : transformateurs

Ce module peut être constant ou variable, et l'on définit alors le gyrateur **GY** et le gyrateur modulé **MGY**.



Pour la causalité de ce type d'éléments, si l'effort est imposé à son entrée, alors l'autre effort est imposé à sa sortie et réciproquement. On a ainsi :



On trouve des exemples de gyrateurs à la figure 7.

Les deux éléments de stockage d'énergie : capacité et inertie

Il existe deux grandes familles d'éléments idéaux de stockage de l'énergie : ce sont les éléments stockant l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Les premiers sont caractérisés par une loi reliant le déplacement généralisé q – intégrale du flux généralisé f – et l'effort généralisé e . Les seconds traduisent une relation entre le moment généralisé p – intégrale de l'effort généralisé e – et le flux généralisé f .

On a pour un élément **C** (stockant l'énergie potentielle ou électrique) : $q = \Phi_c(e)$, et dans le cas linéaire $q = Ce$. Par exemple, en électricité on trouve $q = Cu$ pour un condensateur reliant charge et tension à ses bornes, et

en mécanique de translation pour un ressort linéaire la loi reliant le déplacement à l'effort appliqué s'écrit :

$$x = \frac{1}{k} F.$$

Pour un élément **I** (stockant l'énergie cinétique ou magnétique) : $p = \Phi_i(f)$, pour le cas linéaire $p = lf$. Nous avons en électricité $\varphi = Li$ pour une bobine liant le flux magnétique à l'intensité circulant dans celle-ci et $p = mv$ pour la mécanique de translation entre la quantité de mouvement et la vitesse de la masse m .

Les deux éléments sont de type 1-port et leurs représentations BG sont respectivement :



Il existe deux types de causalité pour ces éléments : la causalité intégrale et la causalité dérivée. Les phénomènes physiques sont nécessairement en causalité intégrale signifiant simplement que la cause précède l'effet. Cela se traduit mathématiquement par le fait que l'ordre de dérivation de l'effet est au moins égal à celui de la cause qui lui a donné naissance. Certains langages graphiques comme les Graphes Informationnels Causaux (GIC) ne connaissent que la causalité intégrale. La méthode des BG permet d'avoir des éléments en causalité dérivée mais cela n'est pas contraire aux lois de la nature. Ce type de causalité traduit simplement une dépendance entre les variables d'état caractérisant le système (pour une explication plus complète voir le paragraphe « La causalité dérivée dans le langage des Bond Graphs »).

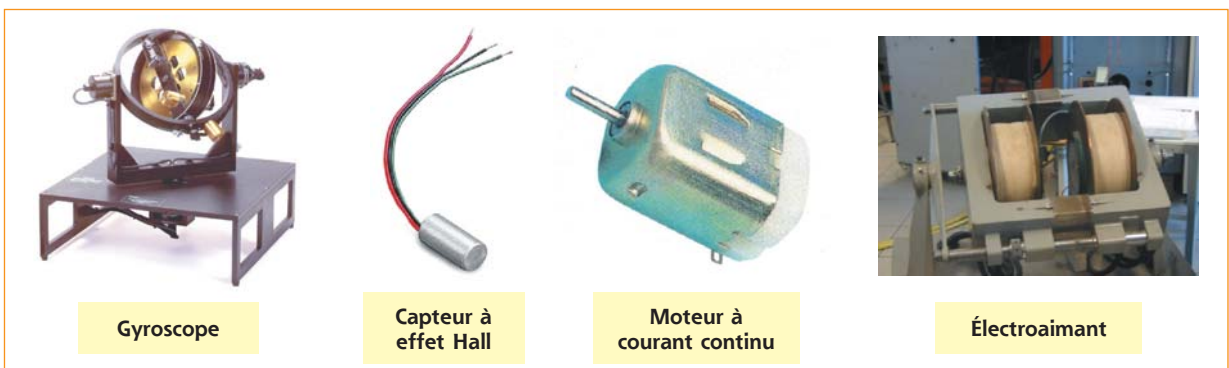
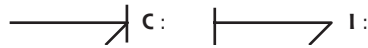


Figure 7 : gyrateurs

Les éléments BG de stockage en causalité intégrale sont :

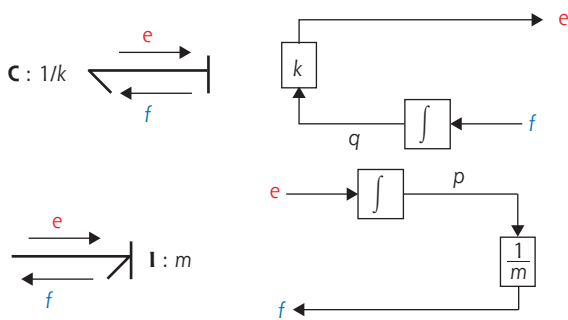


et en causalité dérivée :



Traduisons physiquement la notion de causalité : si on applique une action sur un solide « indéformable » libre de se mouvoir dans le sens de l'action, alors il réagit, si l'action est suffisante, en se déplaçant à une certaine vitesse. De même, si l'on impose un déplacement aux extrémités d'un ressort, ce dernier réagit en appliquant alors un effort.

Traçons maintenant les deux schémas blocs (SB) pour les éléments mécaniques de translation cités plus haut en causalité intégrale :



Cela nous permet de constater la différence entre un lien BG et une « flèche » SB ; le premier est le produit de deux variables, la seconde représente un signal (une seule variable).

Les éléments de stockage, conformément au premier principe de la thermodynamique, ne peuvent pas être modulés (figures 8 et 9).



Figure 9 : éléments de stockage d'énergie cinétique

« Brancher » les sept éléments : jonctions

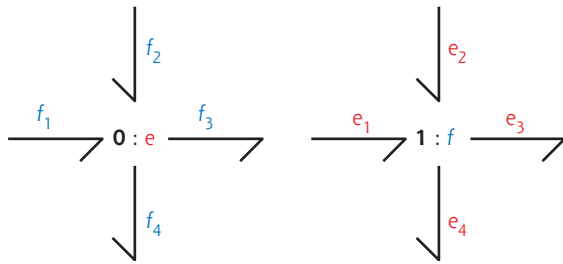
Il faut maintenant relier les éléments précédents. Il existe deux types de jonctions supposées idéales (pas de stockage, pas de création ni de perte d'énergie) : la jonction **0** et la jonction **1**. Pour la première, les efforts sur tous les liens arrivant ou partant de la jonction sont identiques ; pour la seconde, les flux sur tous les liens arrivant ou partant de la jonction sont les mêmes. Ces jonctions sont de type *n*-ports.

Supposons, par exemple, que quatre liens BG soient reliés à ces jonctions. Puisqu'elles sont idéales, la somme des puissances qui entrent dans la jonction est égale à la somme des puissances qui en sortent.

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 = e_3 f_3 + e_4 f_4$$



Figure 8 : éléments de stockage d'énergie potentielle



Pour une jonction **0**, $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ et donc $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$.

Pour une jonction **1**, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$ et donc $e_1 + e_2 = e_3 + e_4$.

La première jonction traduit, dans le domaine électrique, la loi des nœuds, la seconde celle des mailles. Les jonctions permettent ainsi la généralisation des lois de Kirchoff à tous les domaines de la physique. Un seul lien peut imposer l'effort sur une jonction **0**. De même un seul lien peut imposer le flux sur une jonction **1**. Les jonctions permettent la traduction des lois de la physique et réalisent le « branchement » des éléments que nous avons mis en évidence précédemment.

Axe EMERICC

La maquette EMERICC présente dans quelques laboratoires de sciences et techniques industrielles est un axe numérique asservi en position et en vitesse. Ce système et le logiciel associé permettent d'étudier le comportement d'un chariot en translation rectiligne dans différentes situations, en modifiant les paramètres du chariot posé sur des rails et relié à la poulie crantée montée sur l'axe d'un motoréducteur ; il est possible de changer les masses transportées, les matériaux de contact entre les rails et le chariot, l'angle du système par rapport à la table ainsi que passer du « frottement de glissement » au « frottement de roulement ».



Figure 10 : axe numérique EMERICC

La chaîne d'énergie du mécanisme est décrite par le bond graph à mots ci-dessous :

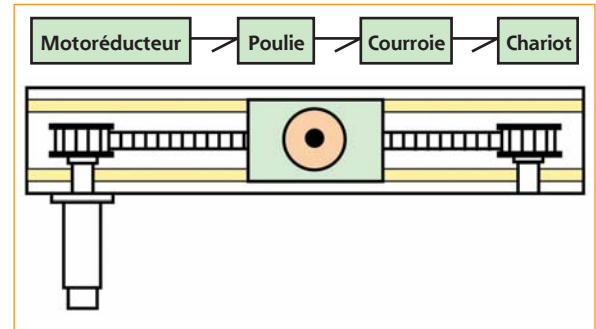


Figure 11 : axe numérique EMERICC et bond graph à mots

Dans un premier temps, faisons apparaître les éléments BG de notre axe. Nous avons un motoréducteur que nous allons considérer comme une source d'effort (couple) **Se**, une poulie qui va « transformer » la mécanique de rotation en mécanique de translation (transformateur **TF** de module le rayon R_p de la poulie), une courroie dont nous allons considérer la raideur et qui sera donc un élément de stockage de type **C**, le chariot qui est un élément de stockage d'énergie cinétique (type **I**) et l'effort de frottement sec que l'on modélisera par une source d'effort **Se**. Dans la démarche BG en mécanique, il est conseillé de rechercher les vitesses et d'y associer des jonctions **1**. Nous avons ainsi le taux de rotation ω_p de la poulie et la vitesse de translation du chariot. De plus, comme la courroie est supposée élastique, il nous faut la considérer comme un ressort (jonction **0**, car même effort dans le ressort). On obtient dès lors le BG acasual de la figure 12.

La procédure d'affectation de la causalité, définie dans l'encart, permet de compléter le BG acasual afin de le rendre opérationnel (écriture des équations). Le BG obtenu montre que l'élément de stockage **C** est en causalité dérivée (voir explication de la causalité dérivée dans l'encart). De plus, j'ai indiqué les variables « effort généralisé » et « flux généralisé », ce qui permet l'obtention des équations du modèle en les précisant pour chaque élément BG. Une méthode plus simple consiste à utiliser un logiciel de simulation des BG. Je propose ici

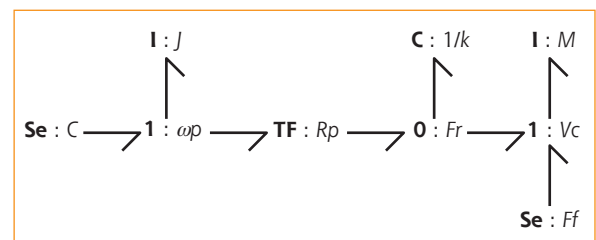


Figure 12 : bond graph acasual de l'axe EMERICC

l'utilisation de 20-sim, un logiciel téléchargeable sur <http://www.20-sim.com> en version « visionneuse » : la seule option manquante dans cette version gratuite est l'enregistrement du modèle créé. Même si ce logiciel est en anglais, son utilisation est intuitive et la création et la simulation d'un bond graph sont aisées.

Procédure d'affectation de la causalité

1. Affecter les causalités imposées par les éléments sources d'effort et de flux et les propager aussi loin que possible en prenant en compte les contraintes imposées par les transformateurs, gyrateurs, jonctions 0 et jonctions 1.
 2. Affecter la causalité intégrale (de préférence) aux éléments de stockage I et C et la propager dans le bond graph.
 3. Affecter une causalité arbitraire aux éléments dissipatifs R et la propager dans le bond graph.
 4. Si le bond graph n'est pas complet d'un point de vue causal, affecter une causalité arbitraire aux éléments non traités et la propager au sein du bond graph.
- Si lors des étapes 2 à 4, il existe un conflit, il faut alors utiliser une causalité différentielle pour les éléments C et I de manière à lever le conflit.

Dans le modèle proposé figure 13, nous n'avons pas détaillé les éléments BG du motoréducteur que nous avons considéré comme une source d'effort. Dans un second temps, nous allons développer le modèle classique de la machine à courant continu (figure 14). À partir du schéma précédent, il est possible de détailler le modèle BG associé. En effet, on retrouve les « deux »

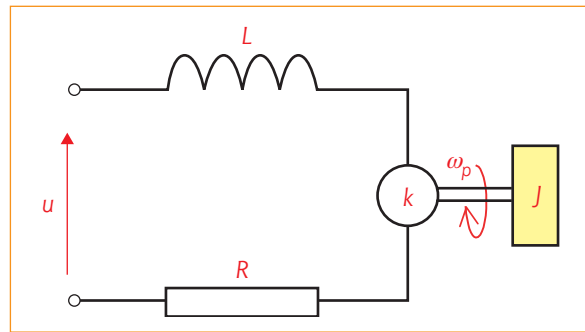


Figure 14 : schéma de la machine à courant continu

parties de la machine à courant continu (parties électrique et mécanique) qui sont « reliées » par un élément **GY**, car les équations classiques du moteur $\omega = ke$ et $c = ki$ et montrent des liaisons de type effort/flux caractéristiques du gyrateur. La loi des mailles appliquée au circuit électrique se traduit par une jonction 1 : i (même intensité dans la maille). Le théorème du moment dynamique appliqué à l'axe du moteur s'exprime par une jonction 1 : ω_p .

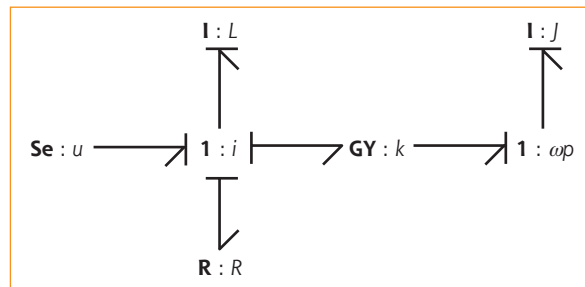


Figure 15 : bond graph de la machine à courant continu



Figure 13 : bond graph causal et équations du modèle de l'axe EMERICC

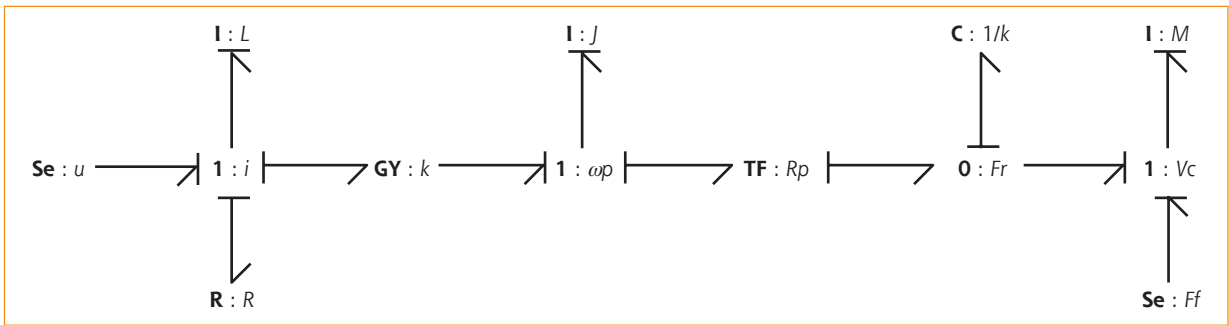


Figure 16 : bond graph de la chaîne d'énergie de l'axe EMERICC

Il ne reste plus qu'à lier les deux sous-systèmes afin d'obtenir un modèle BG de l'axe numérique (figure 16). Nous n'avons, pour le moment, représenté que la chaîne d'énergie de l'axe. Il est possible d'intégrer la chaîne d'information à celle-ci en introduisant la mesure de la vitesse du chariot (ou son image, car le capteur est positionné sur le motoréducteur) ainsi que la commande du processus. Il faut modifier le BG précédent et remplacer notamment la source **Se** : *u* par une source modulée **MSe** : *u* dont l'entrée est le signal issu d'un correcteur recevant l'écart entre la consigne et la valeur mesurée (figure 17).

Les liaisons de la chaîne d'information ne sont pas des éléments de puissance mais des signaux (d'énergie négligeable) représentés par des flèches « simples » comme dans les schéma-blocs. Il est maintenant intéressant de simuler le BG grâce, par exemple, au logiciel 20-sim. Le correcteur choisi est de type proportionnel intégral (PI) (figure 18).

Le logiciel permet d'obtenir simplement la fonction de transfert du modèle linéarisé.

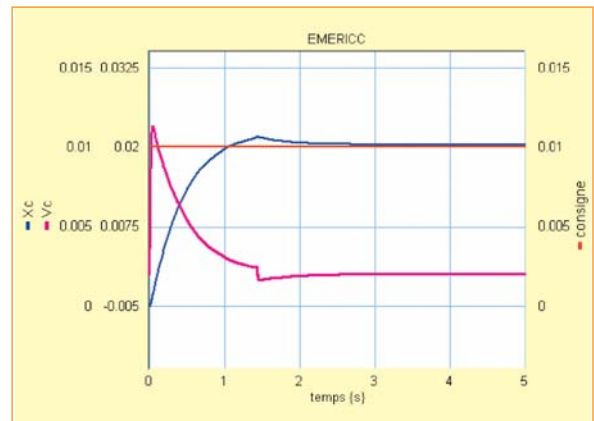


Figure 19 : résultat d'une simulation ; courbes donnant la consigne (rouge), la position (bleu) et la vitesse du chariot (rose)

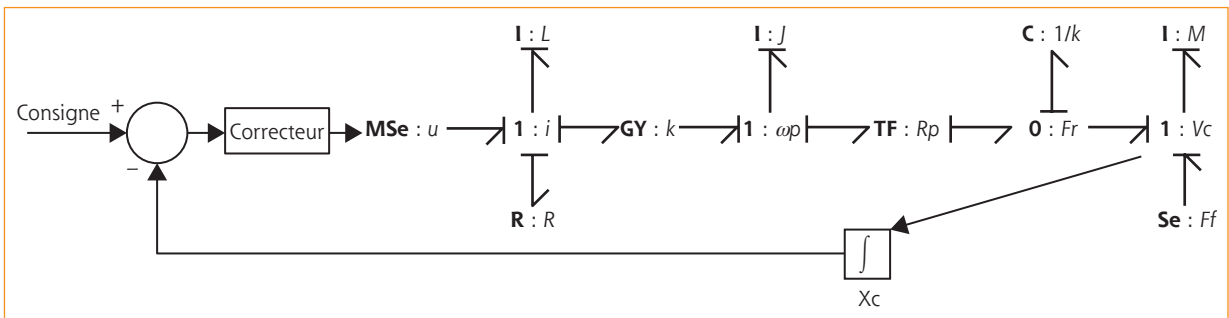


Figure 17 : bond graph complet de l'axe EMERICC

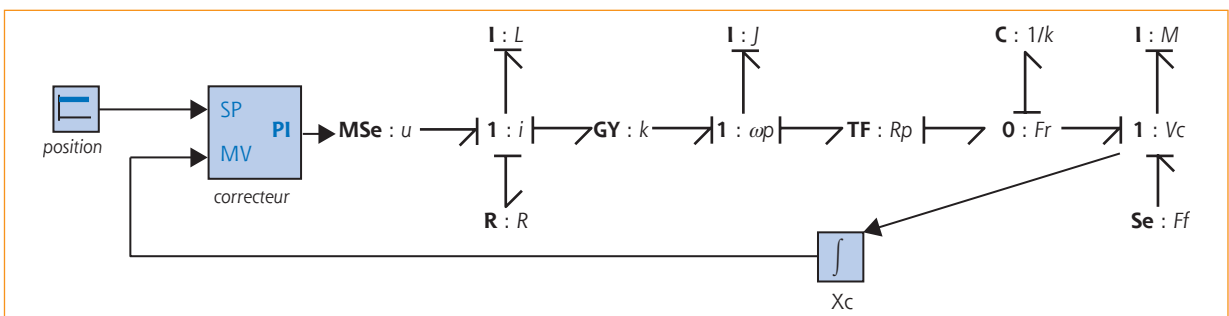


Figure 18 : bond graph complet de l'axe EMERICC sur 20-sim

Servo-vérin d'Ariane 5



Figure 20 : fusée Ariane au pas de tir

Le concours d'entrée « Centrale-Supélec » 2005 filière MP proposait comme thème d'étude la fusée Ariane 5 et notamment, dans sa deuxième partie, la mise en évidence du risque de résonance à basse fréquence du système d'orientation d'une tuyère, réalisé avec deux servo-vérins hydrauliques, et l'analyse de la solution retenue pour limiter l'amplitude de la résonance. Nous allons proposer une rapide étude du système par un bond graph.

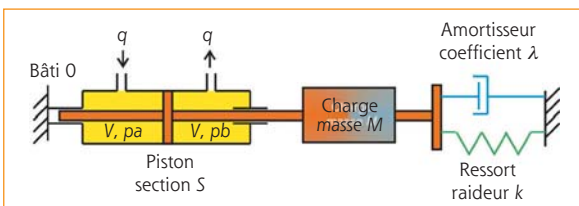


Figure 21 : schéma du servo-vérin étudié d'Ariane 5

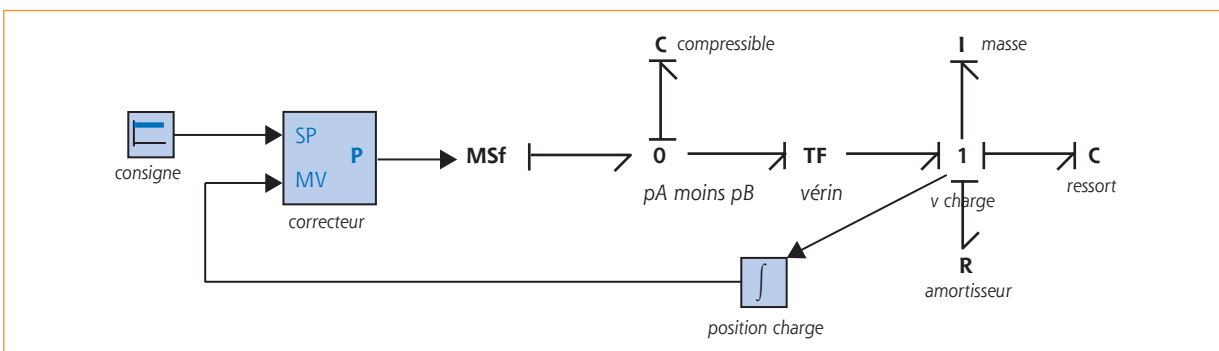


Figure 22 : bond graph sur 20-sim du servo-vérin étudié d'Ariane 5 (20-sim)

On prend en compte la compressibilité du fluide hydraulique. Le débit du fluide circulant dans le vérin est commandé par un servo-distributeur non représenté. Analysons les phénomènes présents dans le système.

Les stockages d'énergie sont la masse (énergie cinétique), la raideur de la liaison de la masse au bâti (énergie potentielle) et la compressibilité de l'huile (énergie potentielle). Il existe un phénomène de dissipation modélisé par un amortisseur.

Le vérin est un transformateur de puissance **TF** de module la section du piston puisqu'il adapte la puissance de sortie mécanique ($P = F \times v$) à la puissance hydraulique d'entrée ($P = p \times q = (p_a - p_b)q$) par les deux équations : $F = Sp$ et $v = \frac{1}{S} q$ et liant respectivement un effort généralisé à un effort généralisé et un flux généralisé à un flux généralisé.

La conservation du débit de fluide entraîne une jonction **0**, le débit entrant dans le vérin sert à déplacer le piston et à « combler » la variation de volume due à la compressibilité de l'huile. L'application du théorème de la résultante dynamique à la masse entraîne l'existence d'une jonction **1** (la somme des actions mécaniques appliquées à la masse est nulle : actions du ressort, de l'amortisseur, du vérin et celle due à l'inertie).

L'introduction de la chaîne d'information qui permet le contrôle du système conduit alors au BG représenté sous 20-sim par la figure 22.

Suspension hydropneumatique d'ambulance MALPE

L'étude suivante a été traitée par deux étudiants (Vincent Lesquin & Sébastien Plouzenec) en classe préparatoire PT au lycée Vauban de BREST à l'occasion de leur TIPE – Travaux d'Initiative Personnelle Encadrés – présenté au jury du concours 2006 de la banque PT. Le sujet choisi portait sur l'étude comportementale des suspensions hydropneumatiques des ambulances utilisées au CHU de

Brest. Avec un minimum de cours, ils ont utilisé l’outil bond graph pour simuler le comportement d’un quart de véhicule.

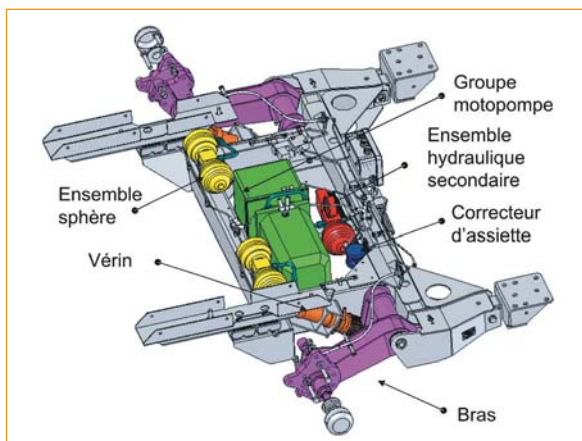


Figure 23 : suspension arrière hydro-pneumatique d’ambulance

Certaines ambulances du CHU de Brest sont équipées de suspensions arrières hydro-pneumatiques MALPE (figure 23) devant répondre à un cahier des charges strict : confort accru du patient par filtration des perturbations causées par l’état de la route, capacité à soutenir le véhicule sans affaissement important (idéalement nul) et, particularité des ambulances, possibilité d’abaisser le seuil de chargement permettant l’introduction des patients le plus horizontalement possible pour des raisons médicales et de confort.

Leur étude a, entre autre, consisté en la comparaison d’un modèle de suspension « classique » au modèle étudié. Ils ont bien compris les transferts d’énergie et tracé les deux modèles BG (suspensions classique et hydro-pneumatique). Ils ont créé un élément BG non linéaire afin de simuler le comportement non linéaire du fluide dans la sphère :

$$P_{\text{huile}} = \frac{P_0 V_0}{V_0 - \Delta V_{\text{huile}}}$$

avec P_0 et V_0 et respectivement la pression et le volume du gaz dans la sphère à l’équilibre, P_{huile} la pression de l’huile et ΔV_{huile} la variation du volume d’huile lors de l’utilisation de la suspension.

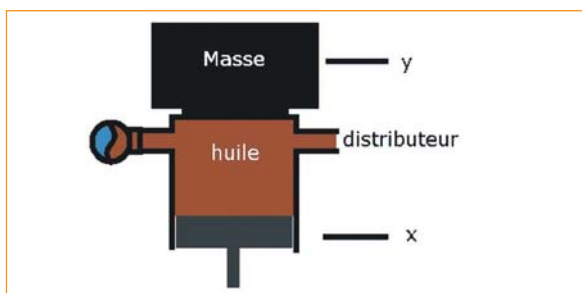


Figure 24 : schéma de la suspension hydro-pneumatique d’ambulance

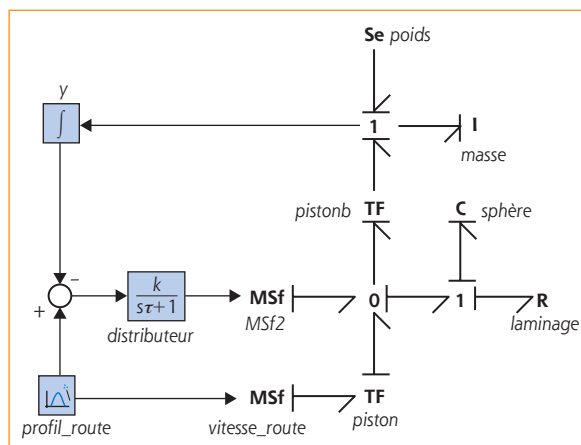


Figure 25 : bond graph de la suspension arrière hydro-pneumatique d’ambulance (20-sim)

Les résultats des deux simulations sont présentés sur la figure 26 et le BG de la suspension hydro-pneumatique sur la figure 25. Les conclusions tirées par rapport aux deux modélisations simulées ont été pour la suspension hydro-pneumatique : affaissement nul, oscillations plus faibles et temps de réponses meilleurs que pour la suspension « amortisseur/ressort ».

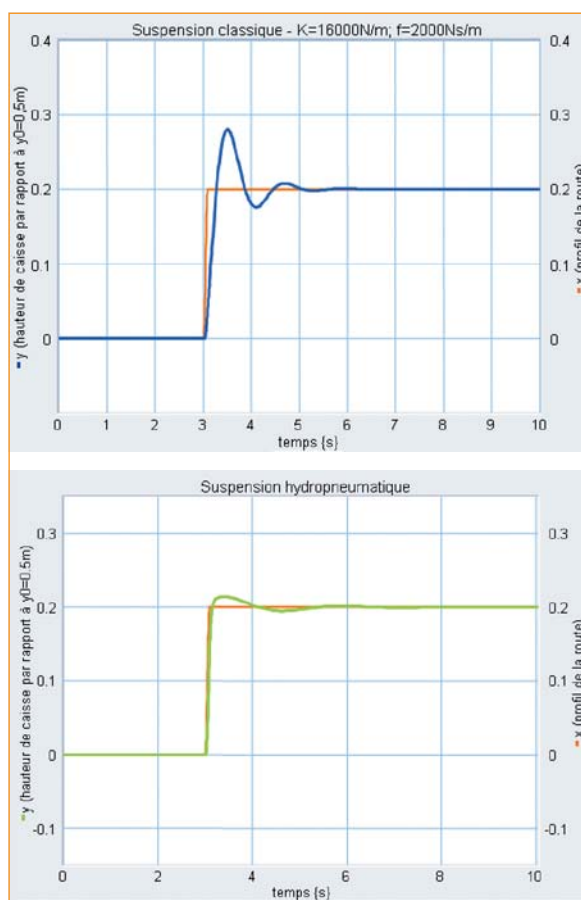


Figure 26 : simulations et comparaison des suspensions classique et hydro-pneumatique

Le constat qui peut être fait, par rapport à l'utilisation à ce niveau d'étude par deux étudiants impliqués dans leur TIPE, est que la modélisation BG ajoute une démarche d'analyse rigoureuse et une bonne compréhension des transferts d'énergie au sein d'un système. Il permet, grâce à un logiciel adapté, la simulation et les représentations graphiques pour tirer les conclusions *ad hoc*. Cette introduction des BG en classes préparatoires est, à mon avis, une bonne chose car un tel langage graphique opérationnel ajoute une véritable plus-value qui amène l'étudiant à une réflexion approfondie : le langage n'est qu'un moyen que seule la compréhension intime des phénomènes de puissance dans un système permet de tracer.

Dispositif bielle – manivelle

Pour terminer, je vous propose la modélisation d'un dispositif bielle – manivelle. Ce dispositif mécanique nécessite, pour être modélisé par bond graph, la connaissance de la loi de transformation de la rotation du vilebrequin en la translation du piston. Rappelons cette loi non linéaire entre le taux de rotation de la « manivelle » et la vitesse de translation du piston :

$$\dot{x} = T(\theta) \dot{\theta} \text{ avec } T(\theta) = - \left(1 + \frac{r \cos \theta}{L \sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2 \theta}} \right) r \sin \theta$$

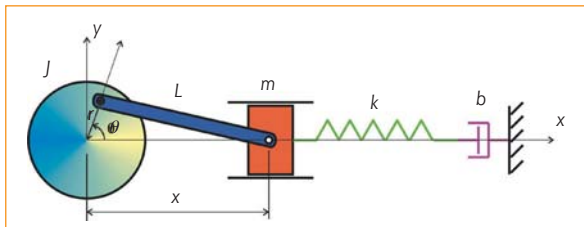


Figure 27 : schéma du dispositif bielle – manivelle

Les éléments BG de notre modèle sont ici les éléments **J** et **I** : *m* pour le stockage d'énergie cinétique, l'élément **C** : $1/k$ pour le stockage d'énergie potentielle, l'élément **R** : *b* pour la dispersion d'énergie ; on aura également le transformateur modulé (il dépend d'une fonction de θ) **MTF** : $T(\theta)$ pour le passage de la mécanique de rotation à la mécanique de translation.

Pour lier ces éléments, on trouvera une jonction **1** : $\dot{\theta}$ pour traduire le théorème du moment dynamique appliqué au vilebrequin, une jonction **0** : *Fr* pour traduire l'effort dans le ressort et enfin une jonction **1** : \dot{x} résultat de l'application du théorème de la résultante dynamique au piston.

L'inertie de la bielle est négligée par rapport aux autres phénomènes de ce type.

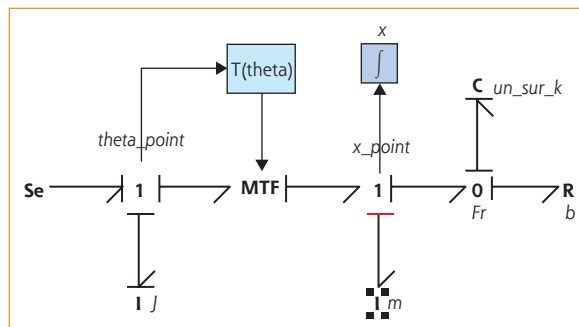


Figure 28 : bond graph du système bielle manivelle (20-sim)

Le bloc $T(\theta)$ du BG contient l'équation $T(\theta)$ définie ci-dessus. Le bloc intégrateur permet d'obtenir la position de la masse en fonction du temps. Remarquons que, parmi les trois éléments de stockage d'énergie, l'un d'entre eux, **I** : *m*, est en causalité dérivée. Ceci n'est pas un contresens physique, mais indique une liaison algébrique entre la variable d'état liée à ce stockage et les autres variables d'état du système (voir le paragraphe « La causalité dérivée dans le langage des Bond Graphs »).

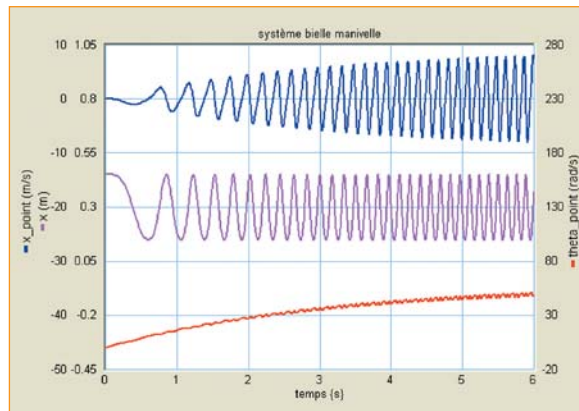
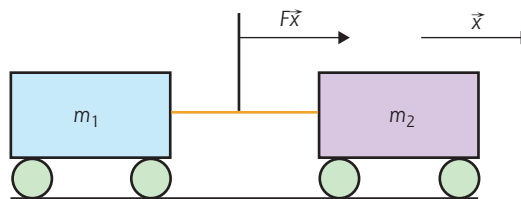


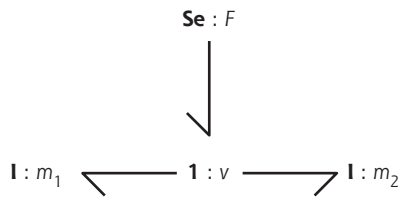
Figure 29 : simulation du dispositif bielle – manivelle (20-sim)

La causalité dérivée dans le langage des Bond Graphs

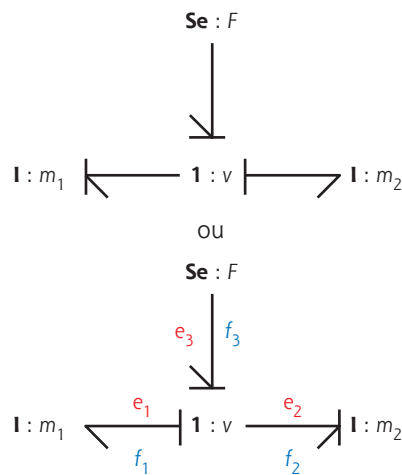
Soit deux solides supposés rigides reliés entre eux par une barre indéformable et soumis à un effort $\vec{F}\vec{x}$ comme le présente le dessin ci-dessous. Les frottements sont négligés.



Le bond-graph (acausal) associé à cet exemple peut se tracer ainsi :



Si l'on veut, par la procédure SCAP (Sequential Causality Assignment Procedure, procédure de mise en place systématique de la causalité sur un BG, réalisée automatiquement par les logiciels de simulation des BG), indiquer la causalité sur ce BG, nous avons deux possibilités :



Nous constatons que nécessairement un élément de stockage d'énergie cinétique **I** est en causalité dérivée (la barre de causalité n'est pas du côté du **I**) puisque pour une jonction **1**, un seul flux peut être imposé.

Écrivons les équations du BG sur le second schéma, par exemple.

$$\text{Jonction } \mathbf{1} : \begin{cases} f_1 = f_3 := f_2 = v \\ e_2 = e_3 - e_1 \end{cases} \quad \text{source } \mathbf{Se} : e_3 := F$$

$$\text{Inertie } \mathbf{I}_1 : \begin{cases} \dot{p}_1 = e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m_1} p_1 \end{cases} \quad \text{Inertie } \mathbf{I}_2 : \begin{cases} \dot{p}_2 = e_2 \\ f_2 = \frac{1}{m_2} p_2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire (et de retrouver !) un résultat évident

$$e_2 = e_3 - e_1$$

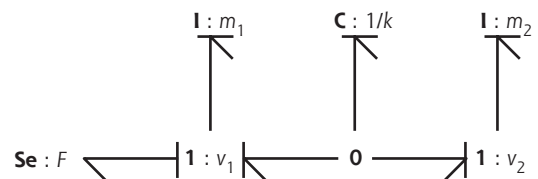
$$m_2 \dot{f}_2 = F - m_1 \dot{f}_1$$

$$\dot{v} = \frac{m_1 + m_2}{F}$$

Commentons ce résultat : Il y a deux éléments de stockage, mais un seul est en causalité intégrale. La détermination de v s'obtient par l'équation différentielle du premier ordre ci-dessus qui ne nécessite qu'une seule

condition initiale. Il existe pourtant deux éléments de stockage : s'ils avaient été en causalité intégrale, cela aurait conduit à un système du second ordre nécessitant deux constantes d'intégration (deux variables d'état, donc). Ici, les deux éléments de stockage d'énergie ne sont pas indépendants. Sur le BG, à cause de la jonction **1**, la vitesse d'une des masses impose la vitesse de l'autre. Connaissant les masses des deux solides, la connaissance de l'énergie d'une d'entre elles détermine l'énergie de l'autre. Bien évidemment, nous aurions très bien pu remplacer les deux solides rigides et reliés rigidement par un seul solide de masse $m = m_1 + m_2$, mais nous n'aurions pas pu faire apparaître la causalité dérivée. Dans notre exemple, les manipulations algébriques étaient très simples. Ce n'est malheureusement pas le cas pour des problèmes industriels plus complexes. S'il est parfois possible de ne pas avoir d'éléments en causalité dérivée ou d'en diminuer le nombre, s'il en reste, il faut des solveurs adéquats pour traiter les équations algébro-différentielles induites par les causalités dérivées. Puisqu'il n'est pas toujours possible d'éviter ces causalités, il n'est pas toujours possible d'utiliser les GIC pour ce type de problème alors que le BG saura peut-être le résoudre (je dis peut-être, car tous les problèmes ne peuvent pas être traités par les BG comme, par exemple, les problèmes à paramètres non localisés conduisant à des équations aux dérivées partielles).

Le BG ci-dessous présente une solution rendant tous les éléments de stockage en causalité intégrale. Le nouveau modèle contient maintenant un élément **C** représentant la raideur du bras intermédiaire, celui-ci n'étant plus considéré maintenant comme rigide. Le traitement mathématique peut maintenant se faire sans aucune difficulté. L'ordre du modèle est maintenant de 3, non plus de 1 comme précédemment. Deux dynamiques ont été introduites.



➔ Remarque concernant la notion de variable d'état

Les variables d'état caractérisent l'état d'un système au sens où leurs valeurs à l'instant zéro constituent les conditions initiales essentielles, c'est-à-dire dont la connaissance est nécessaire et suffisante pour qu'on puisse étudier l'évolution pour $t > 0$ d'un système dont on connaît l'équation différentielle. Le vecteur d'état est « la mémoire minimale » nécessaire pour la prédiction

du comportement futur $x(t)$, qui dépend de $x(t_0)$, de t , de t_0 , et de l'entrée entre t_0 et t . Le nombre minimal de variables d'état est l'ordre du modèle.

Le choix des variables d'état n'est pas unique. En BG, on choisit les variables d'énergie, $p = \int_0^t e(\tau) d\tau + p(0)$, la variable moment généralisé sur les **I** et $q = \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0)$,

la variable déplacement généralisé sur les **C**, mais on peut aussi choisir les variables de puissance regroupées dans le vecteur d'état complémentaire noté $Z = F(x)$ qui sont les flux sur les **I** et les efforts sur les **C**. Ces variables sont appelées « variables de co-énergie ». L'ordre du modèle est le nombre d'éléments **I** et **C** en causalité intégrale. S'il y a des éléments **I** ou **C** en causalité dérivée, les variables p ou q qui leur sont associées sont aussi à prendre en compte dans le vecteur d'état car ces éléments stockent de l'énergie, mais ces variables ne sont pas indépendantes et dans ce cas la dimension de x n'est plus minimale, le modèle d'état se présente sous forme d'équations algèbro-différentielles (autant d'équations différentielles que de variables d'état indépendantes, donc que de **I** et **C** en causalité intégrale, (on retrouve l'ordre du modèle) et autant d'équations algébriques que de **I** ou **C** en dérivée). Ces notions de variables d'état indépendantes et dépendantes sont en général absentes des autres outils de modélisation.

Pour conclure

Le langage des bond graphs a vu le jour au début des années 60. Son créateur est l'américain Henry Paynter. Plus de 45 ans après les premiers pas, de nombreuses entreprises ont fait le choix de cette méthode de modélisation. On trouve les bond graphs notamment chez Philips, Bosch, Ford, Peugeot, Alstom, Aérospatiale, Airbus, EDF,... Ces entreprises ont fait le choix, entre autres, de la conception de leurs systèmes par cette méthode à paramètres localisés car elle est transdisciplinaire et permet aux ingénieurs et techniciens de communiquer avec un langage unique quels que soient leurs domaines de compétences. De plus, le savoir peut se capitaliser aisément par la création de bibliothèques de modèles réutilisables et ajustables. Ces derniers se situent entre les modèles physiques et les formalismes mathématiques et, comme nous l'avons vu, s'obtiennent par une approche énergétique. Il est bien évidemment nécessaire d'apprendre le langage, c'est ce que proposent maintenant de nombreuses écoles d'ingénieurs françaises qui prennent conscience de l'intérêt pour leurs étudiants de connaître cette approche. Notons également que les linéaments de la méthode BG sont proposés depuis peu en classes préparatoires aux grandes écoles dans la filière PT. Gageons que cette méthodologie de conception gagne rapidement les autres filières de l'enseignement supérieur ; je pense

notamment aux STS et IUT qui pourraient assez facilement introduire ce langage dans leurs programmes sans trop de bouleversements. Un intérêt évident pour les étudiants, peut être la conception simple de systèmes pluridisciplinaires en limitant le formalisme mathématique et les calculs, sources d'erreurs qui sont souvent un obstacle à une modélisation efficace. Notons pour terminer que le plus difficile n'est pas, d'apprendre le langage, ce qui est finalement assez simple, mais bien de comprendre les phénomènes présents dans les systèmes. L'art de l'ingénieur reste intact, mais la méthode est une aide très précieuse.

Bibliographie sommaire

Dauphin Tanguy, Geneviève, *Les bond graphs (traité IC2, série systèmes automatisés)*, Lavoisier 2000.

Dauphin Tanguy, Geneviève, *Les bond graphs et leur application en mécatronique*, Les Techniques de l'Ingénieur, S 7 222, pp.1-24, 1999.

Vergé Michel & Jaume Daniel, *Modélisation structurée avec les bond graphs*, Editions Technip, 2003.

Favre Wilfrid, *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps*, thèse de l'INSA Lyon, 1997.

Edibe B., *Modélisation et simulation de systèmes dynamiques par les bond graphs – Application aux systèmes mécaniques polyarticulés*, Thèse de l'université de Rennes 1, Juin 1995.

Karnopp D.C. & Rosenberg R.C., *System dynamics : a unified approach*. New York, John Willey & sons, 1975.

Ould Bouamama Belkacem & Dauphin Tanguy, Geneviève : *Modélisation par bond graph – Éléments de base pour l'énergétique*, Les Techniques de l'Ingénieur, BE 8280, janvier 2006.

Ould Bouamama Belkacem & Dauphin Tanguy, Geneviève : *Modélisation par bond graph – Applications aux systèmes énergétiques*, Les Techniques de l'Ingénieur, BE 8281, avril 2006.

Sitographie

www.ec-lille.fr/bg/ : site de l'équipe bond graphs de Lille.

www.bondgraph.com : site américain du bond graph.

www.2osim.com/ : site d'un logiciel de simulation permettant le tracé des bond graphs.

www.lorsim.be/fra/index.html : site du logiciel ms1, une bonne version démo limitée à 100 variables.

<http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/bgraphs.htm> : mon site avec des explications et des modèles 20-sim.