

« L'insolite étrangeté de cette curieuse bizarrerie me plonge dans une perplexité qui m'intrigue. »

Achille Talon

Automatique continue

1 - Introduction à l'automatique continue

L'automatique est l'art d'analyser, de modéliser puis de commander les systèmes. C'est aussi celui de traiter l'information et de prendre des décisions. Ses domaines d'application sont aussi nombreux que variés : mécanique, électromécanique, électronique, thermique, biotechnologie, industrie spatiale, industries de transformation, économie, ... Composante des systèmes techniques, son étude est essentielle pour appréhender les sciences industrielles.

1.1 – Premières définitions

Les **asservissements** (ou systèmes asservis, en abrégé SA) constituent la branche de l'automatique qui traite les phénomènes physiques sous forme analogique (évolution continue des variables d'un système isolé).

On distinguera deux types de systèmes :

- Les systèmes **non bouclés** pour lesquels aucun contrôle de l'exécution de la commande n'est réalisé. Si des phénomènes parasites perturbent le comportement du système aucune réaction compensatoire ne peut être automatiquement réalisée. On parle alors de système en **boucle ouverte** (BO).
- Les systèmes **bouclés** pour lesquels un contrôle de l'exécution est fait par **rétroaction** de la sortie du système sur son entrée. Ce sont les SA. On parle de système en **boucle fermée** (BF).

Un système est dit **asservi** lorsqu'une grandeur de sortie suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (**ordre** ou **consigne**) quelque soient les effets perturbateurs extérieurs.

On peut classer les systèmes asservis de deux manières suivant le type d'entrée de référence :

Lorsque la consigne est indépendante du temps le système est dit **régulateur**.

Exemples : la régulation de température d'un local, la régulation de la vitesse de rotation d'un lecteur de disquettes, la régulation du débit d'une vanne.

Lorsque la consigne dépend du temps, on parle **d'asservissement** ou de **système suiveur**.

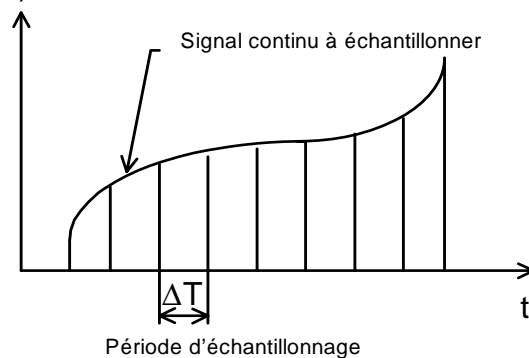
Exemples : les asservissements de position des bras de robots, les asservissements de position d'axe d'un machine outil à commande numérique (MOCN), les asservissements de position d'une antenne radar.

¹ Servomoteur à vapeur Farcot. Joseph Farcot (1824-1908) est le créateur du servomoteur en 1859.

On peut également classer les SA à l'aide du signal traité par leur commande

- Les **systèmes asservis continus** gèrent des signaux analogiques ;
- Les **systèmes asservis échantillonnés** gèrent des signaux discrets ou échantillonnés c'est-à-dire des signaux découpés tels qu'entre deux instants d'échantillonnage, la chaîne d'action soit soumise à une consigne constante.

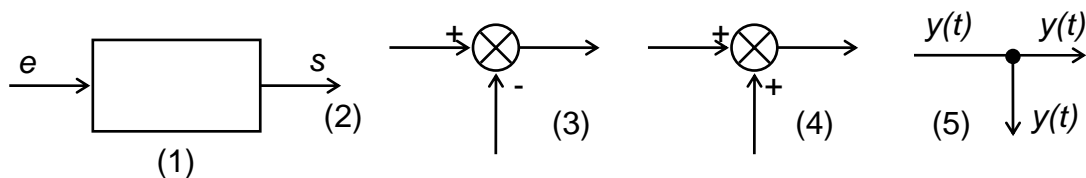
Lorsqu'un ordinateur numérique est utilisé pour la commande d'un SA continu, les informations échantillonnées en provenance du ordinateur sont converties en informations continues grâce à un **convertisseur numérique/analogique (CNA)**. En retour, les informations continues en provenance du procédé doivent être converties en signaux numériques par un système appelé **convertisseur numérique/analogique (CAN)**.



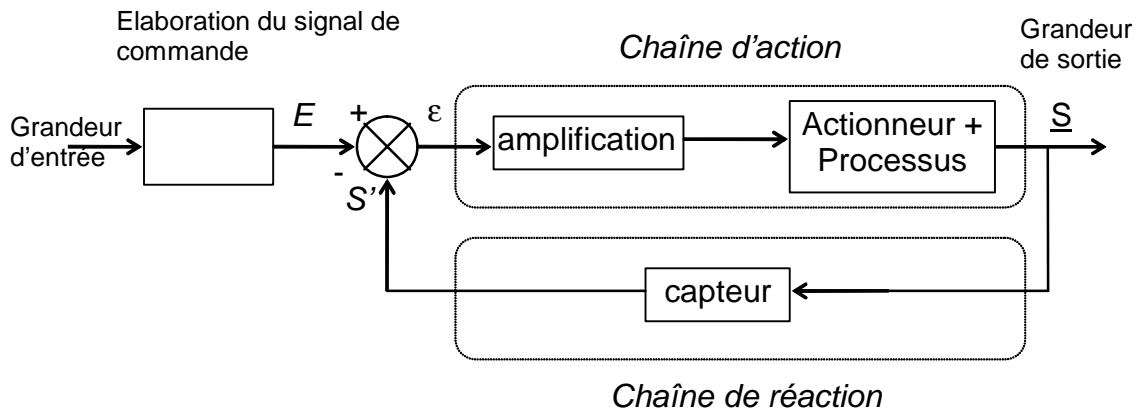
1.2 – Schémas fonctionnels des SA

Il est commode de représenter graphiquement un SA à l'aide de diagrammes fonctionnels ou schémas blocs. Les « briques » de la construction sont :

- le rectangle (1) qui représente un élément ou groupe d'éléments du système,
- la flèche (2) qui représente une grandeur physique entrant ou sortant d'un élément,
- le comparateur (3) ou le sommateur (4) qui soustrait ou ajoute une même grandeur physique,
- le branchement (5) qui représente un prélèvement d'information.



A partir de ces éléments, on peut construire schématiquement un SA sous la forme :
On fait ainsi apparaître les grandeurs caractéristiques suivantes :



E grandeur d'entrée appelée **consigne** ou **référence** qui définit la grandeur de sortie à atteindre ;

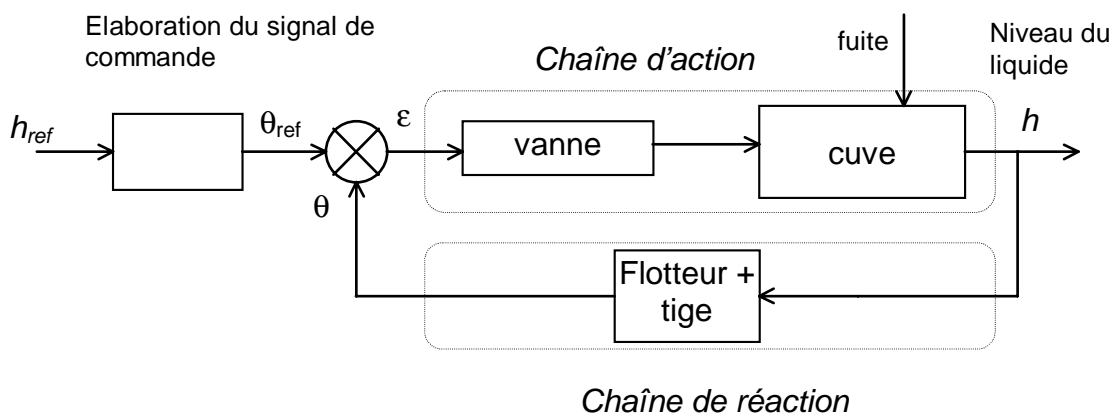
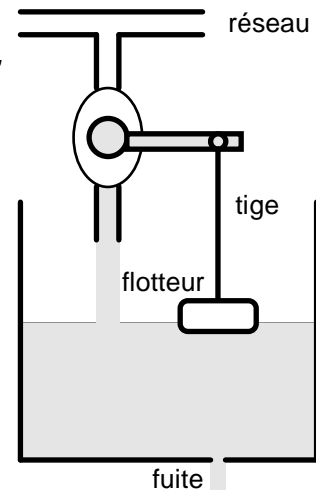
S grandeur de sortie qui est la variable caractéristique de l'état (vitesse, position, température,...) du système ;

S' mesure de la sortie. Cette grandeur est fournie par la chaîne de réaction. Elle doit impérativement être de même nature physique que la consigne pour pouvoir lui être comparée ;

erreur ou écart. Elle est fournie par le **comparateur** ou **détecteur d'écart** et est proportionnelle à la différence $E - S'$ et éventuellement de nature différente.

Exemple de système asservi à commande automatique : la régulation du niveau d'une cuve.

On peut tracer un schéma fonctionnel de ce système simple et faire apparaître les grandeurs caractéristiques.



Par rapport à la grandeur de référence, le débit circulant par la fuite entrave le fonctionnement « normal » et apparaît comme une **perturbation** du système.

1.3 – Chronologie de l'automatique

~ 250 av JC premières réalisations d'automatismes par les grecs dans l'irrigation et le comptage du temps (clepsydre de Ktesybios).

~ 150 av JC Héron d'Alexandrie reprend ses devanciers et propose des mécanismes basés sur la contre-réaction (réalisation d'automates comme le théâtre roulant utilisant les roues dentées ou une fontaine à vin).

Période intermédiaire où les évolutions ne sont pas significatives.

XVIII^{ème} Automates de Jacques de Vaucanson et métiers à tisser de Joseph-Marie Jacquart.

1785 Régulateur à boules de James Watt pour la machine à vapeur permettant l'adaptation de la vitesse de rotation d'un arbre à la variation de la charge.

XIX^{ème} Machines outils. Concepts mathématiques sur l'automatique notamment étude des instabilités des systèmes : James Clerk Maxwell (1831–1879), Edward J. Routh (1831–1907), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Charles Sturm (1803–1855)...

1847 Algèbre logique de George Boole (1815–1864)

fin XIX début XX^{ème} Régulations électriques (tension, fréquence...). Introduction du régulateur PID par Elmer Sperry en 1911. Théorie des amplificateurs à contre-réaction par Harold Stephen Black et Harry Nyquist qui étudie les équations différentielles dans le domaine fréquentiel.

Milieu du XX^{ème} Etude théorique des servomécanismes par l'analyse fréquentielle. Introduction des notions de marge par Hendrik Bode. Perfectionnement du PID en technologie pneumatique et notamment énoncé des règles de réglage du PID par J.G. Ziegler et N.B. Nichols. Premiers calculateurs numériques à relais.

Après la seconde guerre mondiale, rapprochement des démarches des électriciens, des électroniciens et des mécaniciens aboutissant à la théorie des servomécanismes. Premiers calculateurs électroniques à tubes aux USA. Utilisation de la théorie pour le guidage des missiles et des avions. Utilisation de la transformation de Laplace et de la notion de fonction de transfert (Albert C. Hall). Théorie de l'information de Claude Shannon et Norbert Wiener. Après 1950, étude des représentations d'état, de la commande optimale, des systèmes échantillonnés et des systèmes non linéaires. Avec les développements de l'électronique et de l'informatique, amélioration à tous les niveaux dans les études des systèmes automatiques. Les modèles de la cybernétique servent de support à l'étude générale des systèmes.

1975 Création en France de l'AFCEC groupe de normalisation qui proposa le GRAFCET comme méthode d'étude des systèmes automatiques séquentiels et qui

devint en 1987 norme internationale. Essor des Automates Programmables Industriels (API).

2 - Systèmes linéaires continus et invariants

2.1 – Définitions

L'étude porte sur les évolutions temporelles des sorties des systèmes soumis à des entrées variables dans le temps. Le programme limite l'étude à des systèmes monovariables (une seule entrée et une seule sortie).

La modélisation mathématique se traduit par une relation entre l'évolution temporelle de la sortie $s(t)$ en fonction de celle de l'entrée $e(t)$ ou de celle d'une perturbation $p(t)$. Nous supposons que cette relation ne varie pas dans le temps : le système sera dit **invariant**.

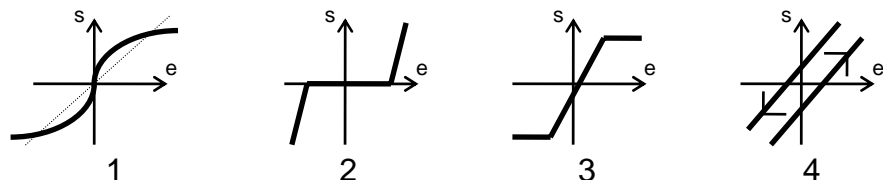
Un système est **linéaire** s'il possède la propriété suivante :

si $s_1(t)$ est la sortie obtenue en appliquant $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la sortie obtenue en appliquant l'entrée $e_2(t)$, alors pour tout réel α et pour tout réel β , en appliquant l'entrée $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$, le système génère la sortie $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$.

Le système est non linéaire autrement.

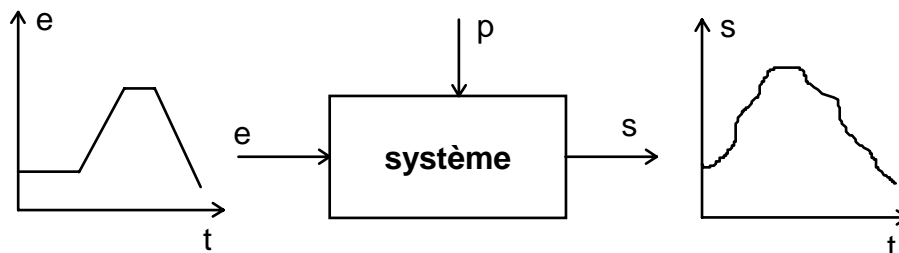
Pratiquement, tous les systèmes physiques présentent des non linéarités sous différentes formes :

- courbure (1)
- seuils (2)
- saturation (3)
- hystérésis (4)



Toutefois, ces systèmes peuvent être représentés, moyennant une certaine imprécision sur le modèle, par des systèmes linéaires : par exemple, linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

On peut représenter un SLCI par :



2.2 – Modèles de connaissance et de comportement

Un modèle mathématique permet de représenter un système réel. Il existe deux grandes classes de modèles :

le **modèle de connaissance** s'établit directement à partir de l'analyse du système réel, en mettant directement en œuvre les lois de la physique. Ce modèle découle essentiellement des hypothèses choisies pour écrire les lois physiques.

Exemple : l'établissement d'un courant électrique dans une bobine (R,L) soumise à une tension u est décrite par l'équation différentielle :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

qui constitue ainsi le modèle de connaissance déterminé dans l'hypothèse de non saturation du circuit magnétique (L constant) et de température constante (R constant).

Le **modèle de représentation** s'établit sur la base de connaissance des signaux de sortie obtenus en fonction des signaux d'entrée appliqués au système à modéliser. Celui-ci est une sorte de boîte noire dont on ne connaît que le flux entrant et sortant du système : on ne connaît pas la physique interne du système. On fait cependant l'hypothèse d'une structure mathématique liant la sortie à l'entrée du système qui sera pour un SLCI une équation différentielle linéaire à coefficient constant. On parlera d'identification du processus cherchant expérimentalement à déterminer les coefficients de l'équation supposée.

Exemple : L'évolution de la température d'un four électrique recevant une puissance P est supposée modélisée par l'équation différentielle :

$$b_0 P = a_1 \frac{d\theta}{dt} + a_0 \theta$$

En appliquant différents signaux à l'entrée du four et en étudiant l'évolution de la température du four, on essaie d'identifier les constantes.

2.3 – Performances d'un SLCI

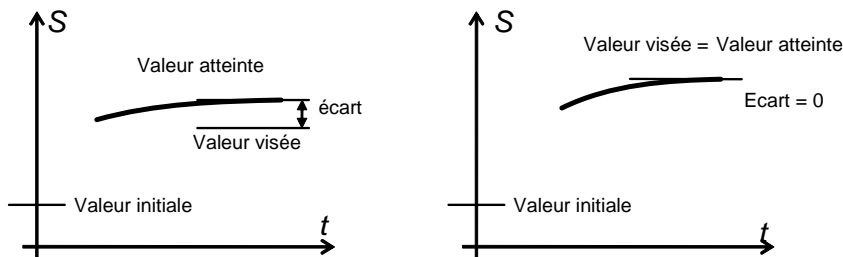
Le cahier des charges d'un système asservi impose en général un certain nombre de contraintes sur le comportement du système. Ces contraintes portent sur :

- ♦ la précision,
- ♦ la rapidité,
- ♦ la stabilité,
- ♦ l'amortissement.

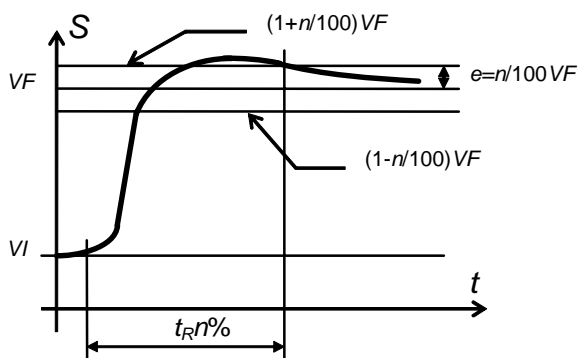
A chacune de ces contraintes est associé un critère d'évaluation. Le problème sera alors de vérifier le respect ou le non respect de ces contraintes et le cas échéant de mettre en place une stratégie de réglage et/ou de correction du système.

2.3.1 – La précision

La précision est l'aptitude d'un système à atteindre la valeur visée. Elle est caractérisée par l'écart entre la valeur attendue et la valeur effectivement atteinte par la grandeur de sortie.



2.3.2 – La rapidité



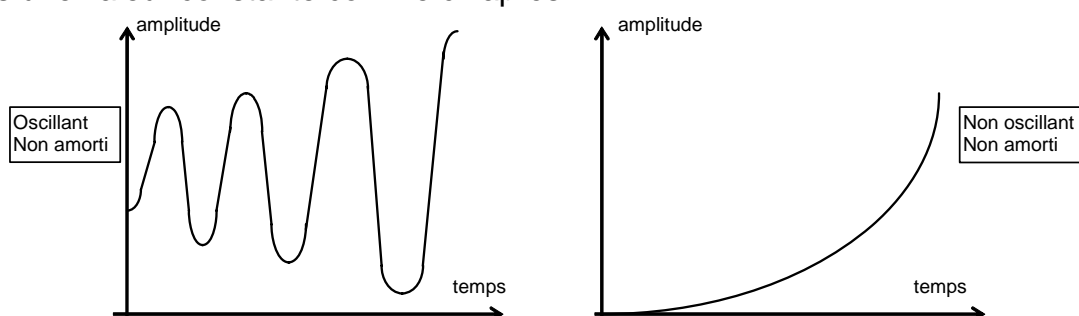
La rapidité caractérise la « vitesse » avec laquelle le système peut passer d'une position à une autre. Toutefois, il faut constater que lors du passage d'une valeur à une autre de la grandeur de sortie, la valeur finale est souvent atteinte de manière asymptotique. Pour caractériser la rapidité, on ne peut donc pas utiliser directement le temps mis pour passer d'une position à une autre qui en toute rigueur est infini.

Le critère d'évaluation de la rapidité d'un SA est le temps de réponse à $n\%$, c'est-à-dire le temps que met la réponse pour que la valeur absolue de l'écart entre la valeur finale (valeur atteinte asymptotiquement) et la valeur instantanée reste inférieure à $n\%$ de la valeur finale.

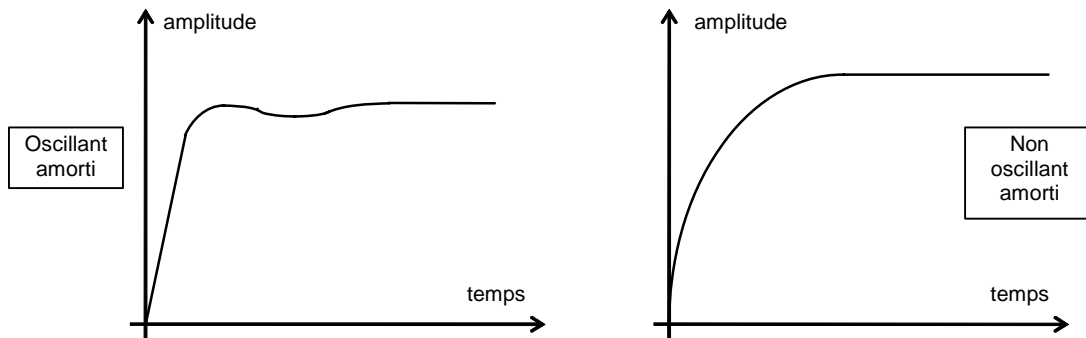
En pratique, c'est le temps de réponse à 5% qui est utilisé.

2.3.3 – La stabilité

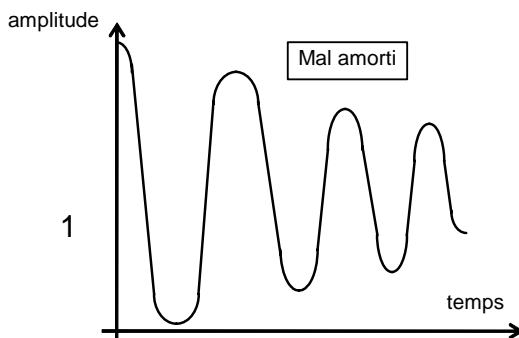
Pour la grande majorité des systèmes, il est hors de question qu'à consigne constante et en absence de toute perturbation la grandeur de sortie ne converge pas vers une valeur constante comme ci-après.



Le comportement que l'on souhaite obtenir est semblable à ceux ci-dessous.

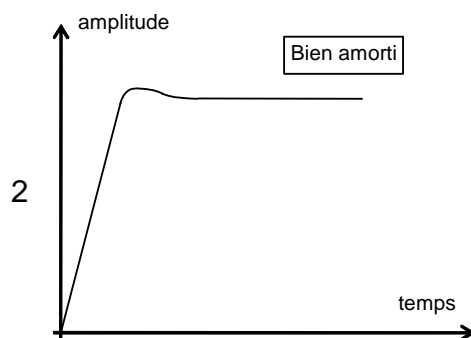


2.3.4 – L'amortissement



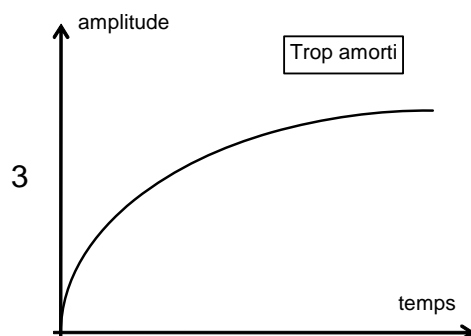
Lors du passage d'une valeur à une autre de la grandeur de sortie, le comportement du système peut être tel que la réponse présente des oscillations.

Si ces oscillations sont trop prononcées, elles dénotent alors pour le système un manque de stabilité (réponse 1).



Pour la réponse 3, un amortissement trop important conduit à une perte significative de rapidité pour le système.

La réponse 2 propose un bon compromis entre amortissement et rapidité pour un système oscillant.



Pour caractériser la qualité de l'amortissement, on peut s'appuyer sur le temps de réponse à $n\%$ qui correspond alors au temps de stabilisation du système.

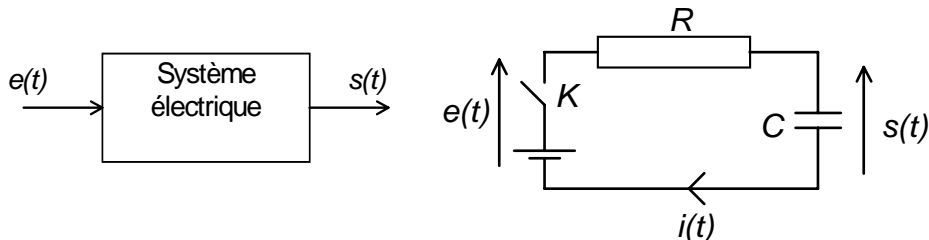
Il faut compléter cette information par le dépassement qui caractérise l'amplitude des oscillations qui, pour certaines applications doit impérativement être nulle.

3 - Fonctions de transfert des SLCI

3.1 – Représentation des SLCI

3.1.1 – Quelques exemples

3.1.1.1 – Exemple électrique



On étudie la charge d'un condensateur lors de la fermeture à $t = 0$, de l'interrupteur K . Pour $t < 0$, la charge du condensateur est nulle.

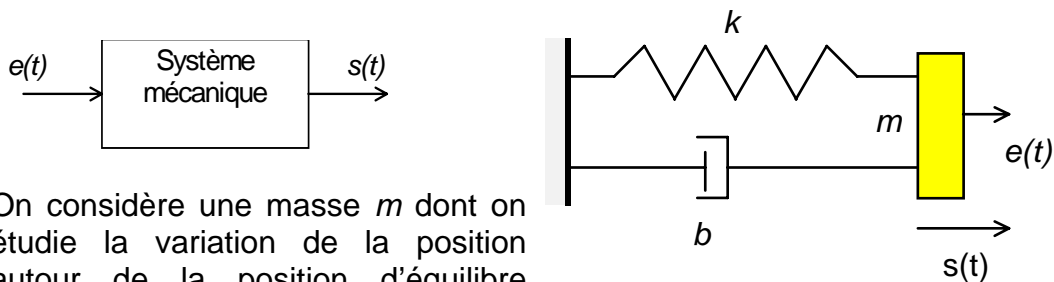
On a la loi des mailles : $s(t) = e(t) - Ri(t)$

Pour le condensateur : $i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$

On en déduit l'équation différentielle de la charge du condensateur :

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

3.1.1.2 – Exemple mécanique

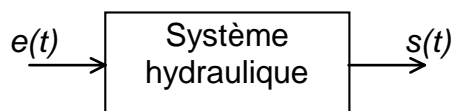


On considère une masse m dont on étudie la variation de la position autour de la position d'équilibre repérée par $s(t)$ lorsqu'on lui applique un effort noté $e(t)$. Cette masse est liée à un bâti par deux éléments en parallèle : un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux de coefficient b .

L'application du PFD à la masse en projection sur l'axe horizontal donne :

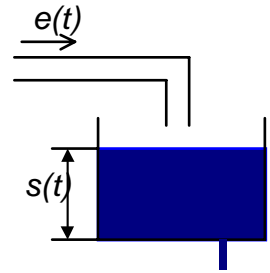
$$m \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = e(t)$$

3.1.1.3 – Exemple hydraulique



On considère un réservoir de section S qui se remplit de fluide de débit d'alimentation $e(t)$.

On s'intéresse à la variation de hauteur $s(t)$ si le débit de sortie est proportionnel à la hauteur du fluide.



On a la relation de conservation de la masse :

$$S \frac{ds(t)}{dt} = e(t) - \alpha s(t)$$

3.1.2 – Cas général

Les exemples proposés montrent que la relation entre la sortie et l'entrée du système (SLCI) se représente par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Plus généralement, pour un SLCI, la relation entre l'entrée et la sortie prend la forme :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Des considérations sur la nature causale des systèmes physiques imposent que l'on ait systématiquement : $m \leq n$.

La solution générale d'une telle équation différentielle est la solution générale s_0 de l'équation sans second membre plus une solution particulière s_1 de l'équation complète.

La théorie permet de déterminer la sortie s en fonction de l'entrée e : il s'agit de la réponse s du système à une excitation e . Souvent, c'est la démarche inverse que cherche à réaliser le concepteur de PC de systèmes : aussi, il veut connaître l'entrée à appliquer pour obtenir une sortie particulière. L'inversion de ces équations est alors plus délicate. La méthode de la transformation de Laplace va permettre de transformer les équations différentielles en équations algébriques qu'il sera plus aisé d'inverser. Ici va s'introduire la notion de fonction de transfert d'un système.

3.2 – Fonctions de transfert

3.2.1 – Transformation de Laplace²

♦ Définition –

Soit f une fonction d'une variable réelle t . Nous supposons cette fonction continue par morceaux pour $t \geq 0$. De plus, nous supposons que $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t)f(t)$ existe et est finie. Avec ces hypothèses, f admet une transformée de Laplace $F(s)$ définie par :

² Pierre Simon LAPLACE (1749 - 1827) astronome et mathématicien français

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt$$

s appartenant au corps des nombres complexes

♦ Propriétés de la transformation de Laplace :

1 – Linéarité : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}, L(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda L(f(t)) + \mu L(g(t)) = \lambda F(s) + \mu G(s)$

2 – Dérivation : ordre 1 : $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0+)$

ordre n : $L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$

Remarquons si les conditions initiales sont toutes nulles (conditions de Heaviside³),

$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0$, alors $L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s)$.

3 – Intégration : $L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$

4 – Théorème du retard : $L(f(t - \tau)) = \exp(-\tau s) F(s)$

5 – Théorème du changement d'échelle : $L\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = aF(as)$

6 – Translation dans le plan de Laplace : $L(f(t) \exp(at)) = F(s - a)$

7 – Originale de la dérivée d'une transformée : $L^{-1}\left(\frac{dF(s)}{ds}\right) = -tf(t)$

8 – Originale de l'intégrale d'une transformée : $L^{-1}\left(\int_0^s F(q) dq\right) = \frac{f(t)}{t}$

9 – Transformée du produit de convolution : $L\left(\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau\right) = F(s)G(s)$

10 – Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale :

$$\lim_{0+} f(t) = \lim_{\infty} sF(s)$$

$$\lim_{\infty} f(t) = \lim_0 sF(s)$$

Le théorème de la valeur finale ne s'applique que si les pôles de $sF(s)$ ont leurs parties réelles négatives.

Le théorème de la valeur initiale ne s'applique pas si le degré du numérateur de $sF(s)$ est supérieur au degré de son dénominateur.

On trouvera dans le tableau, à la fin, une liste des transformées usuelles utilisées en automatique.

³ Olivier HEAVISIDE (1850 - 1925) mathématicien et physicien anglais

3.2.2 – Définition des fonctions de transfert

On sait que la représentation mathématique d'un SLCI est donnée par l'équation :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Supposons les conditions initiales nulles et appliquons la transformation de Laplace à cette dernière ; on obtient la relation :

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) S(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) E(s)$$

On pose :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}$$

et l'on obtient :

$$S(s) = H(s)E(s)$$

$H(s)$ est appelée Fonction de Transfert (FT) du système ; c'est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie sur la transformée de Laplace de l'entrée sous l'hypothèse des conditions de Heaviside.

La fonction de transfert peut s'écrire dans le corps des nombres complexes sous la forme :

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Les z_i sont les zéros de la FT, et les p_i sont les pôles de la FT. En isolant les zéros et les pôles nuls de la FT, on obtient une autre écriture :

$$H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{s}{z_i}\right)}{s^\alpha \prod_{j=1}^{n-\alpha} \left(1 - \frac{s}{p_j}\right)}$$

K est appelé le gain de la fonction de transfert (gain statique pour $s = 0$)

est la classe de la FT

n (degré de $D(s)$) est l'ordre de la FT

Remarque : Dans le cas où les conditions initiales (CI) ne sont pas toutes nulles, on peut définir un polynôme en s , $N_0(s)$, dépendant des CI, tel que :

$$S(s) = \frac{N(s)}{D(s)} E(s) + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

3.3 – Schémas fonctionnels

La description d'un système conduit généralement à écrire plusieurs équations différentielles faisant apparaître différentes variables intermédiaires. La recherche de la FT et de sa représentation sous forme de schéma fonctionnel conduit à adopter généralement la démarche suivante :

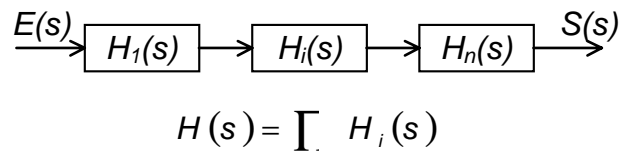
- Rechercher les FT élémentaires entre variables intermédiaires par application de la transformation de Laplace aux différentes équations différentielles,
- Construire le schéma fonctionnel,
- Agréger ces fonctions de transfert.

La deuxième étape est réalisée par la mise en coïncidence des entrées et des sorties de chacune des boîtes associées respectivement à chacune des FT élémentaires. Elle fournit une vision graphique synthétique de la modélisation du système.

La dernière étape repose sur l'utilisation de quelques règles exposées ci-après. Elle permet à partir d'une vue détaillée d'obtenir une vision plus synthétique du modèle de comportement du système décrit par une FT globale.

3.3.1 – Eléments en cascade

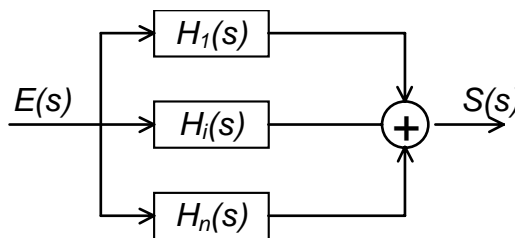
Soit n éléments de FT $H_i(s)$ mis en cascade ; la FT de l'ensemble est égale au produit des FT de chaque élément :



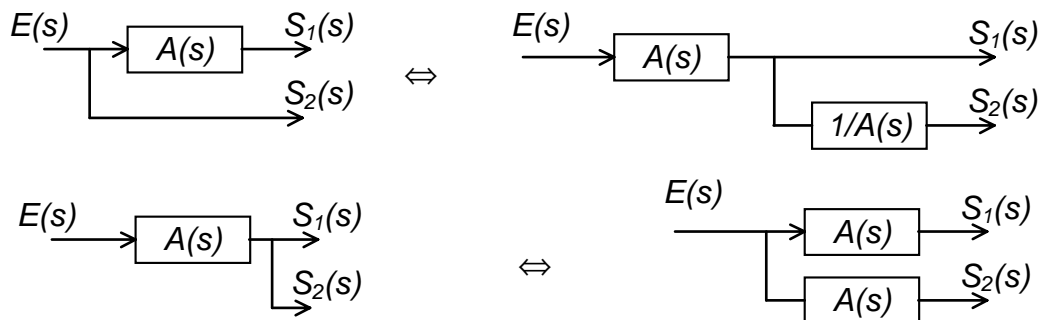
3.3.2 – Eléments en parallèle

Soit n éléments de FT $H_i(s)$ mis en parallèle ; la FT de l'ensemble est égale à la somme des FT de chaque élément :

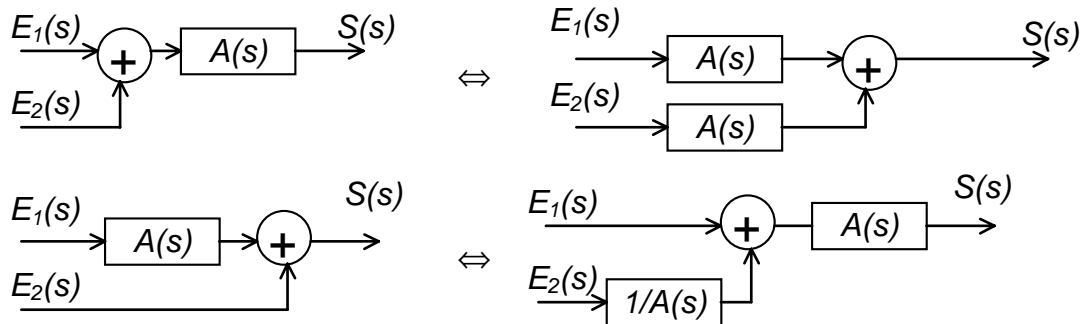
$$H(s) = \sum H_i(s)$$



3.3.3 – Déplacement d'un point de prélèvement

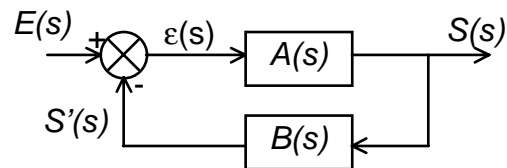


3.3.4 – Déplacement d'un point de sommation



3.4 – Fonction de transfert d'un système bouclé

On considère un système asservi représenté par le schéma ci-contre. On note $A(s)$ et $B(s)$ les FT de la chaîne d'action et de la chaîne de réaction.



$$\begin{aligned}
 S(s) &= A(s) \varepsilon(s) \\
 S'(s) &= B(s) S(s) \\
 \varepsilon(s) &= E(s) - S'(s) \\
 S(s) &= A(s) [E(s) - S'(s)] \\
 S(s) &= A(s) [E(s) - B(s) S(s)] \\
 S(s) &= \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)} E(s)
 \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de transfert du système bouclé appelée fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

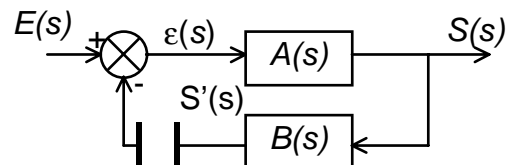
$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}$$

On définit alors la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) comme le rapport entre l'image de la sortie $S'(s)$ et l'erreur $\varepsilon(s)$. Elle correspond à l'ouverture de la boucle, c'est-à-dire, à sa coupure au niveau du comparateur.

On a donc : $S'(s) = A(s) B(s) \varepsilon(s)$

D'où : $\frac{S'(s)}{\varepsilon(s)} = A(s)B(s)$

La FTBO est définie par $G(s) = A(s)B(s)$



La FTBO est le produit des FT de la chaîne d'action et de la chaîne de réaction.

Pour un retour unitaire $B(s) = 1$ $H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$.

La FTBO aura un intérêt particulier dans l'étude de la correction (dimensionnement du correcteur).

4 - Analyse temporelle des SLCI

4.1 – Réponse temporelle d'un système dynamique et la stabilité

Pour les systèmes linéaires, il existe deux grandes méthodes classiques pour leur analyse : l'analyse fréquentielle ou harmonique étudiée en seconde année est la réponse en régime permanent d'un système soumis à un régime sinusoïdal ; l'analyse temporelle est l'étude de la réponse d'un système à un signal d'entrée variant dans le temps.

Les principaux signaux d'entrée utilisés sont l'impulsion et l'échelon et permettent d'étudier notamment la réponse transitoire d'un système.

La réponse temporelle d'un SLCI peut être toujours décomposée en deux parties : la réponse transitoire et la réponse forcée (régime permanent) :

$$s(t) = s_t(t) + s_p(t)$$

La FT de la sortie d'un système est donnée par $S(s) = H(s) E(s)$.

$S(s)$ est donc une fraction rationnelle de la variable s dont les pôles sont la réunion de tous les pôles (p_i) de $H(s)$ et de tous les pôles (p_j) de $E(s)$.

En inversant la relation précédente ($L^{-1}(S(s))$), on montrerait que la sortie $s(t)$ est égale à la somme d'exponentielles $\exp(p_i t)$ et $\exp(p_j t)$ pondérées par des coefficients pour des pôles simples ou des fonctions du temps pour des pôles d'ordre multiple. On a ainsi la somme :

♦ d'une somme d'exponentielles $\exp(p_i t)$ pondérées, qui ne dépendent que des pôles p_i de $H(s)$, donc du système : *c'est la réponse transitoire*.

♦ d'une somme d'exponentielles $\exp(p_j t)$ pondérées, qui ne dépendent que des pôles p_j de $E(s)$, donc de l'entrée : *c'est la réponse forcée* qui a la même forme que l'entrée, puisqu'elle fait intervenir les mêmes exponentielles (seules les pondérations sont différentes).

On observe alors deux situations :

– la réponse transitoire tend vers 0 quand t tend vers l'infini : le système est stable ;

– la réponse transitoire tend vers l'infini ou devient sinusoïdale quand t tend vers l'infini : le système est instable.

On sait que la FT d'un SLCI s'écrit :
$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Comme on le verra plus loin la transformée de Laplace d'une impulsion est égale à 1 : donc la réponse impulsionnelle d'un système est l'image de la FT du système : on a dans ce cas :

$$S(s) = H(s)$$

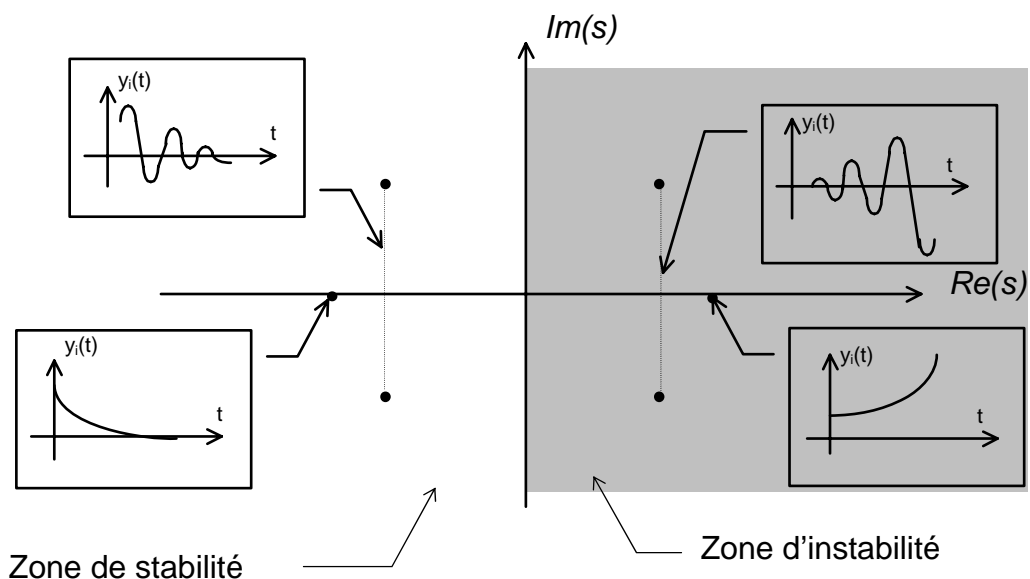
Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ l'ordre de multiplicité respectif des pôles de la FT p_1, p_2, \dots, p_n . La réponse impulsionnelle est alors de la forme :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) \exp(p_i t)$$

pour laquelle $A_i(t)$ est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur à $(\alpha_i - 1)$. Notons $p_i = \sigma_i \pm i\omega_i$ les racines complexes conjuguées et $p_i = \lambda_i$ les racines réelles de ce polynôme. La réponse impulsionnelle s'écrira :

$$s(t) = \sum_i A_i(t) \exp(\lambda_i t) + \sum_i A_i(t) \exp(\sigma_i t) \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

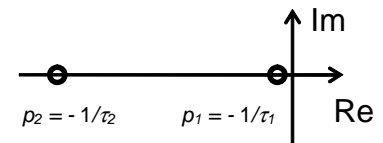
Avec cette écriture, il devient évident que, quand t tend vers l'infini, la CNS pour que $s(t)$ tende vers zéro est que les parties réelles des pôles de la FT soient négatives. On traduit cette remarque graphiquement dans le plan complexe de la variable symbolique s , de la manière suivante :



Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un SLCI soit stable est que tous les pôles de sa FT aient une partie réelle négative.

Le comportement dynamique d'un système dépend des pôles de la FT, mais également des zéros. On peut matérialiser ces pôles et ces zéros dans le plan complexe et l'on exploite la figure obtenue pour en déduire les propriétés du système.

On peut, par exemple, faire apparaître certaines valeurs dominantes pour le système qui impose la dynamique au système ; par exemple, pour un système électromécanique à deux constantes de temps l'une pour la partie mécanique ($\tau_1 = 5$ s, par exemple), l'autre pour la partie électrique ($\tau_2 = 5$ ms, par exemple), on vérifie que c'est la partie « mécanique » qui impose la réponse du système : c'est le mode dominant. Dans le plan complexe :



4.2 – Signaux fondamentaux d'entrée (signaux tests)

Les trois signaux les plus utilisés en analyse temporelle sont l'impulsion, l'échelon et la rampe ; nous allons les passer en revue.

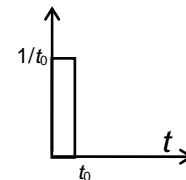
4.2.1 – L'impulsion (dite de Dirac)

Ce signal n'est pas une fonction au sens mathématique mais une distribution (objet mathématique qui dépasse le cadre de ce cours). En automatique continue, on se contentera de l'assimiler à une fonction (au grand dam des mathématiciens pour lesquels, il s'agit d'une absurdité) ; en voici alors la « définition » admise :

On appelle impulsion de Dirac, la limite d'une famille de fonctions f_{t_0} telles que

$$f_{t_0}(t) = \frac{1}{t_0} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_0$$

$$f_{t_0}(t) = 0 \quad \text{pour } t > t_0 \text{ et } t < 0$$



On note : $\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} f_{t_0}(t)$ l'impulsion unitaire de Dirac

On vérifie la propriété suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Un calcul montre que la transformée de Laplace de l'impulsion est : $L(\delta(t)) = 1$.

On a alors une autre définition d'une FT d'un système : La FT d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

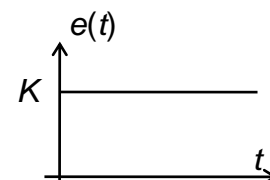
En effet, $S(s) = H(s) \times 1$ implique $s(t) = h(t)$.

4.2.2 – L'échelon

La fonction échelon est définie de la manière suivante :

$$e(t) = u(t) = K \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$e(t) = u(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$



Si $K = 1$, l'échelon est dit unitaire.

L'intégrale de l'impulsion de Dirac est la fonction échelon unitaire.

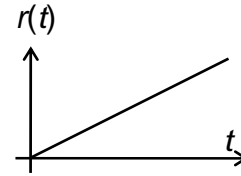
La transformée de Laplace de la fonction échelon est :

$$L(e(t)) = E(s) = \int_0^{\infty} K \cdot \exp(-st) dt = \frac{K}{s}$$

4.2.3 – La rampe

La rampe est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r(t) &= Kt && \text{pour } t \geq 0 \\ r(t) &= 0 && \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$



Cette fonction est l'intégrale de la fonction échelon

La transformée de Laplace de la rampe est : $L(r(t)) = \frac{K}{s^2}$

4.3 – Les systèmes du premier ordre

4.3.1 – Définition

Un système du premier ordre est un système dont la sortie $s(t)$ vérifie l'équation différentielle :

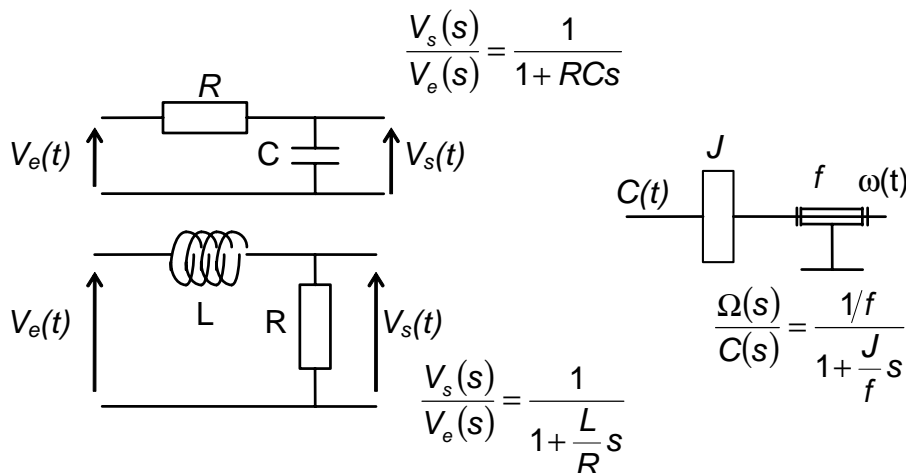
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

La FT correspondante avec les conditions de Heaviside est :

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

avec K le gain statique et τ la constante de temps.

Exemples de systèmes du premier ordre :



On appellera système du premier ordre généralisé, un système pour lequel la FT s'écrit :

$$H(s) = K \frac{1 + \tau_0 s}{1 + \tau_1 s} = K \frac{\tau_0 s - z_0}{\tau_1 s - p_1}$$

4.3.2 – Réponse aux entrées tests

♦ Réponse indicielle

avec $e(t) = E_0 u(t)$, on a $E(s) = \frac{E_0}{s}$ et l'on trouve : $S(s) = \frac{E_0 K}{s(1 + \tau s)}$

On décompose cette fonction en éléments simples :

$$S(s) = E_0 K \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right)$$

La transformation inverse de Laplace donne :

$$s(t) = E_0 K \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) u(t)$$

Remarquons que le terme dans l'exponentielle est le pôle de la fonction de transfert.

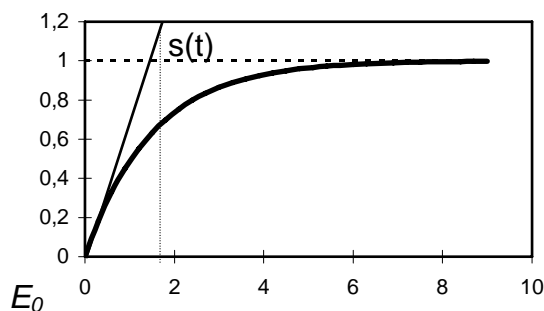
Représentons cette fonction (ici pour $K < 1$) :

Notons que si le gain est différent de 1 alors il existe un écart entre les amplitudes d'entrée et de sortie en régime établi.

Étudions quelques caractéristiques de cette fonction

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{E_0 K}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u(t) \text{ d'où la pente à l'origine } \frac{E_0 K}{\tau}.$$

$$\text{Pour } \begin{cases} t = \tau, s(t) = E_0 K (1 - \exp(-1)) = 0.63 E_0 K \\ t = 3\tau, s(t) = E_0 K (1 - \exp(-3)) = 0.95 E_0 K \end{cases}$$



Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5 % vaut trois fois la constante de temps.

La réponse indicielle d'amplitude E_0 d'un système du premier ordre généralisé s'écrit :

$$s(t) = E_0 K \frac{\tau_0}{\tau_1} \left(\alpha + \beta \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right)$$

$$\alpha = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \beta = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_0}$$

♦ Réponse à une rampe

Avec $e(t) = V \cdot t \cdot u(t)$ c'est-à-dire $E(s) = \frac{V}{s^2}$, on obtient : $S(s) = \frac{V \cdot K}{s^2(1 + \tau s)}$.

En décomposant cette transformée sous la forme : $S(s) = V \cdot K \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{1 + \tau s} \right)$, puis

en inversant cette relation : $s(t) = V \cdot K \cdot \left(t - \tau + \tau \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \cdot u(t)$.

Effectuons une étude asymptotique

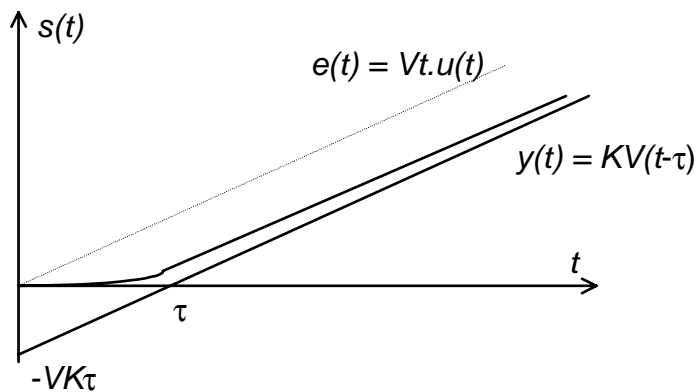
$$\lim_{\infty} \frac{s(t)}{t} = V \cdot K \quad \text{et} \quad \lim_{\infty} (s(t) - V \cdot K \cdot t) = -V \cdot K \cdot \tau$$

L'asymptote oblique a pour équation : $y(t) = V \cdot K \cdot (t - \tau)$.

On peut remarquer que l'intersection de l'asymptote avec l'axe des temps est indépendante de la pente de la rampe et vaut τ .

La pente de la tangente à l'origine : $\lim_{\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_0 s \cdot L\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)$ est nulle.
 $= s \cdot s \cdot S(s) = 0$

Représentation pour $K < 1$



Noter la divergence entre la sortie et l'entrée à l'infini quand le gain K est différent de 1. Si K égal à 1, alors on constate un écart constant qui vaut $-V$.

4.4 – Les systèmes du deuxième ordre

4.4.1 – Définition

Un système du deuxième ordre est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

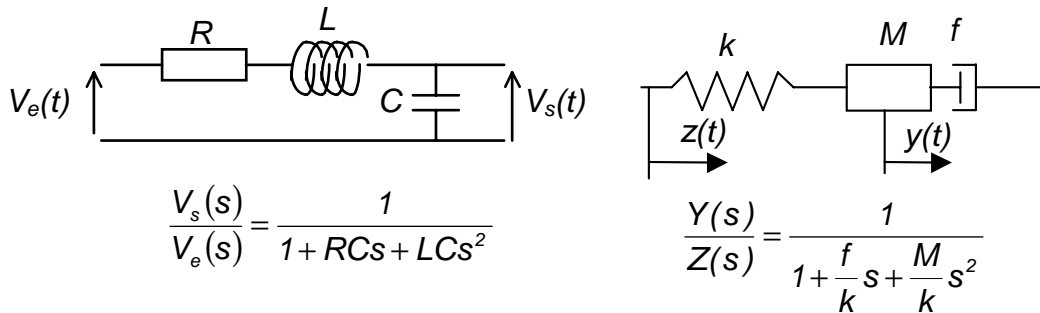
$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

La FT correspondante avec les conditions de Heaviside

$$H(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

avec K le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du système non amorti.

Exemples de systèmes du deuxième ordre :



4.4.2 – Réponse aux entrées tests

♦ Réponse indicielle

avec $e(t) = E_0 u(t)$ soit $E(s) = \frac{E_0}{s}$, on a :

$$S(s) = \frac{E_0 K}{s \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 \right)} = E_0 K \left[\frac{1}{s} - \frac{\frac{s}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \right],$$

Pour la décomposition du terme $\frac{\frac{s}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} = \frac{s + 2\xi\omega_0}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2}$, il est nécessaire

de s'intéresser aux solutions de $1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2} = 0$, c'est-à-dire aux pôles de la FT.

Le discriminant réduit s'écrit : $\Delta' = \frac{1}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$ et trois cas sont à envisager :

- ♦ $\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$ 2 racines complexes $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
- ♦ $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$ 1 racine double $p_{1,2} = -\alpha_0$
- ♦ $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$ 2 racines réelles $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$

Examinons chacun des cas :

$$\xi < 1$$

si $\xi < 1$, on utilise les formes $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ et $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ dont les transformées inverses sont respectivement $\exp(-at)\cos(bt)$ et $\exp(-at)\sin(bt)$, d'où l'on tire :

$$\frac{s+2\xi\omega_0}{\omega_0^2+2\xi\omega_0s+s^2} = \alpha \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} + \beta \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Par identification, on en déduit :

$$\frac{s+2\xi\omega_0}{\omega_0^2+2\xi\omega_0s+s^2} = \frac{s+\xi\omega_0}{(s+\xi\omega_0)^2+\omega_0^2(1-\xi^2)} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_0)^2+\omega_0^2(1-\xi^2)}$$

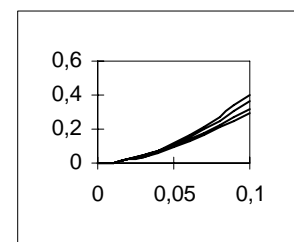
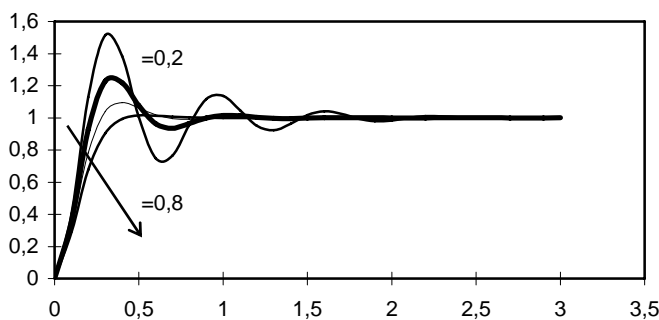
La transformation inverse de Laplace donne pour $s(t)$:

$$s(t) = E_0 K \left[1 - \frac{\exp(-\xi\omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} + \varphi) \right]$$

Le comportement du système est oscillant et amorti. La pseudo-période des oscillations est caractérisée par la pseudo-pulsation $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$.

Noter que l'exposant $-\xi\omega_0$ de l'exponentielle est la partie réelle des pôles de la FT.

Représentation graphique pour $E_0=K=1$



zoom sur l'origine

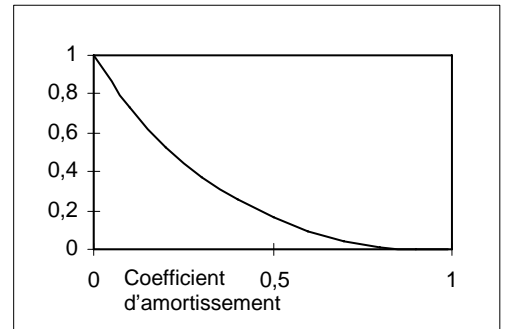
On constate que plus le coefficient d'amortissement est faible, plus la réponse est oscillante, donc moins l'amortissement est bon.

L'amortissement est caractérisé par le dépassement. Le dépassement indicielle (réponse à un échelon) est l'amplitude relative de la première oscillation : $d = \frac{D}{KE_0}$.

Pour un système du second ordre son expression qui ne dépend que du coefficient d'amortissement est

$$d = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

La figure ci-contre représente l'évolution du dépassement en fonction du coefficient d'amortissement.



$$\xi > 1$$

Si $\xi > 1$, on peut effectuer la décomposition suivante :

$$\frac{s + 2\xi\omega_0}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2} = \alpha \frac{\tau_1}{1 + \tau_1 s} + \beta \frac{\tau_2}{1 + \tau_2 s}$$

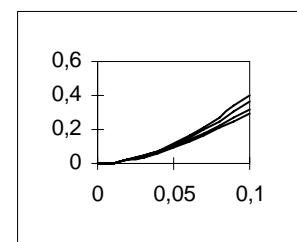
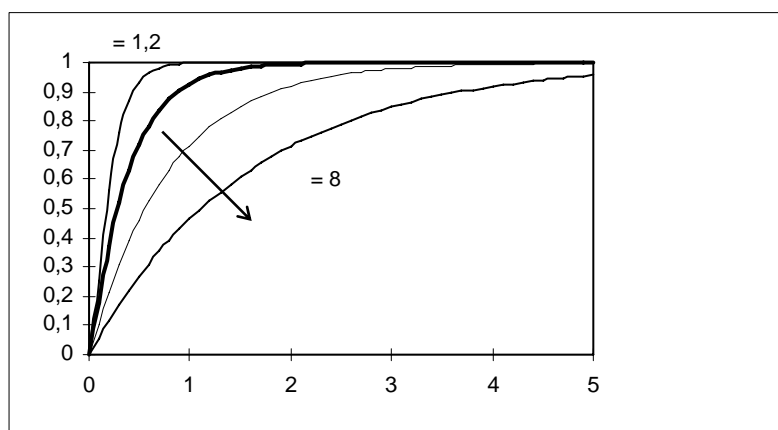
avec,

$$\tau_1 = -\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{et} \quad \tau_2 = -\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

l'identification et le transformation inverse de Laplace, donne :

$$s(t) = E_0 K \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \tau_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right) \right]$$

Le comportement du système est non oscillant et amorti comme le montre la figure ci-après



zoom sur l'origine

$$\xi = 1$$

Dans ce cas, on a simplement : $\frac{s + 2\xi\omega_0}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2} = \frac{s + 2\omega_0}{(\omega_0 + s)^2}$ que l'on décompose en

$$\frac{s + 2\xi\omega_0}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2} = \frac{1}{(\omega_0 + s)} + \frac{\omega_0}{(\omega_0 + s)^2}$$

d'où l'on peut tirer

$$s(t) = E_0 K (1 - (1 + \alpha_0 t) \exp(-\alpha_0 t))$$

Le comportement est donc non oscillant et amorti (comme dans le cas précédent).

Remarque : lorsque le premier dépassement est supérieur à 5%, ce qui correspond au cas où $0 < \xi < 0,7$, le temps de réponse à 5% est approché par la relation :

$$t_r \approx \frac{3,2}{\xi \omega_0}$$

Lorsque $\xi > 0,7$, le temps de réponse augmente rapidement avec . Dans ces conditions, le temps de réponse à 5% passe par un minimum pour $\xi = 0,69$.

4.5 – D'autres systèmes

systèmes avec intégrations : un système possède une intégration d'ordre p si 0 est pôle d'ordre p de la FT. L'équation différentielle associée à un processus intégrateur d'ordre 1 est de la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

systèmes à retard : Si $H_0(s)$ est la FT du système sans retard, alors la FT d'un système dont le retard est t_0 a pour FT : $H(s) = \exp(-s t_0) \cdot H_0(s)$.

systèmes à réponse inverse : systèmes pour lesquels la réponse indicielle démarre avec un signe opposé à celui de la valeur finale. Ces systèmes possèdent un nombre impair de zéros à partie réelle positive.

5 - L'identification d'un modèle de SLCI

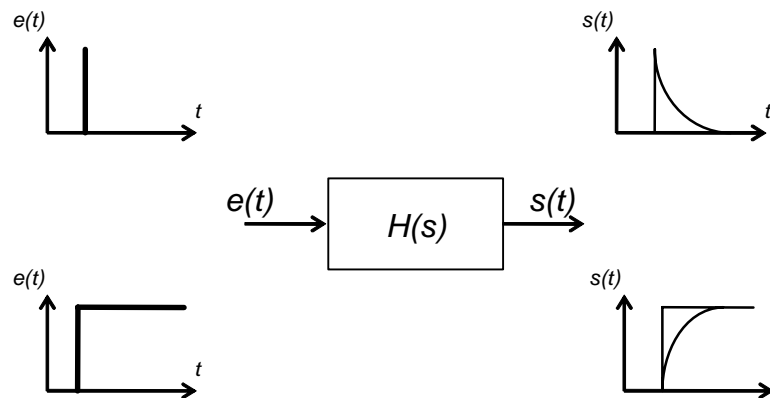
5.1 – Méthode d'identification

On ne sait pas toujours écrire les lois qui caractérisent un modèle de connaissance d'un système, soit par méconnaissance, soit par une trop grande complexité. On va alors utiliser un modèle de comportement ou de représentation en choisissant a priori une loi simple entre la sortie et l'entrée faisant intervenir des paramètres à identifier.

Le modèle qui sera obtenu après identification n'aura pas de signification physique mais traduira uniquement au mieux le comportement du système. Les paramètres du modèle pourront être réglés afin d'ajuster le modèle au comportement réel. Il sera nécessaire de réduire au minimum le nombre de paramètres caractérisant le système.

Avant de choisir une méthode particulière, il faut choisir l'entrée à appliquer et la structure mathématique du modèle.

Dans ce cours, l'identification du système se fera avec des entrées du type échelon ou impulsion. On aura alors le schéma :



Le choix de la forme du modèle peut s'opérer en observant la réponse indicielle en se posant les questions suivantes :

- ♦ la réponse présente-t-elle un retard ?
- ♦ le procédé est-il stable ou du type intégrateur (la réponse indicielle contient une rampe) ?
- ♦ la réponse présente-t-elle un dépassement ou est-elle apériodique ?

5.2 – Les systèmes apériodiques sans retard

La réponse à un échelon est une fonction monotone croissante.

- ♦ recherche d'un modèle du premier ordre

1^{ère} méthode

La tangente à l'origine ne doit pas être nulle.

Face à une réponse indicielle stable, sans retard et sans dépassement, l'observation de la tangente à l'origine permet de déterminer si l'on a affaire à un système du premier ordre ou non.

On déterminera la constante de temps (paramètre unique du système)

– en traçant la pente à l'origine qui vaut théoriquement $1/\tau$,

– en traçant l'horizontale $y = 0,63 K$ dont l'intersection avec la courbe de la réponse indicielle vaut

– en traçant l'horizontale $y = 0,95 K$ dont l'intersection avec la courbe de la réponse indicielle vaut 3τ .

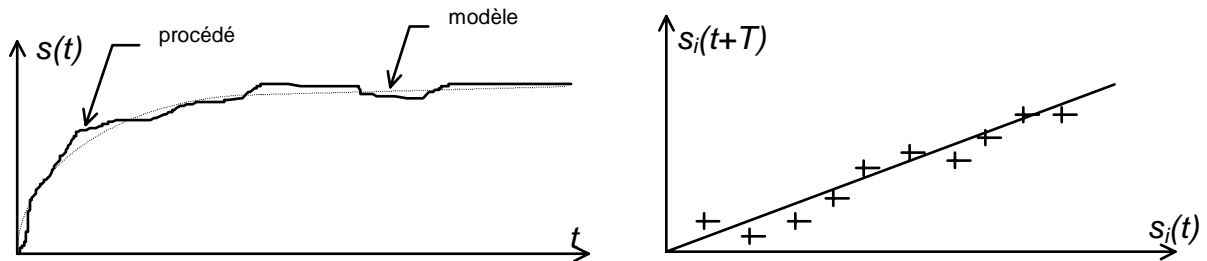
2^{de} méthode

Soit T un intervalle de temps donné. Posons : $s_i(t) = K - s(t)$. On vérifie que :

$$s_i(t+T) = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) s_i(t)$$

Si l'on trace la courbe représentative lieu des points $M(s_i(t), s_i(t+T))$, on trouve une droite de pente $a = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$. En mesurant cette pente, on trouve la constante de

temps $\tau = -\frac{T}{\ln(a)}$.



- ♦ recherche d'un modèle du deuxième ordre apériodique

Un modèle du deuxième ordre vérifie l'équation : $s_i(t) + \alpha s_i(t-T) + \beta s_i(t-2T) = 0$ (*)

Or cette expression est vraie pour tout t , lorsque l'on a

$$\begin{cases} 1 + \alpha z_1 + \beta z_1^2 = 0 \\ 1 + \alpha z_2 + \beta z_2^2 = 0 \end{cases}$$

avec $z_1 = \exp\left(\frac{T}{\tau_1}\right)$ et $z_2 = \exp\left(\frac{T}{\tau_2}\right)$

Le principe de la méthode est alors :

1 – Déterminer les coefficients α et β à partir des relevés expérimentaux $s(0)$, $s(T)$, $s(2T)$,... en traçant $s_i(t-T)/s_i(t)$ en fonction de $s_i(t-2T)/s_i(t)$. En utilisant (*), on vérifie que les points sont sur la droite d'équation : $y = -\frac{\beta}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha}$.

2 – Calculer les racines x_1 et x_2 de : $1 + \alpha x + \beta x^2 = 0$

3 – Calculer les constantes de temps : $\tau_1 = \frac{T}{\ln(x_1)}$ et $\tau_2 = \frac{T}{\ln(x_2)}$

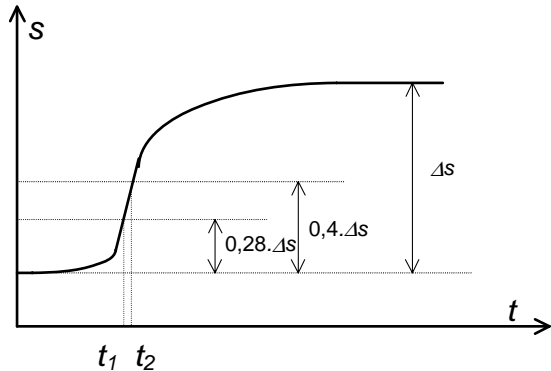
5.3 – Les systèmes apériodiques avec retard

- ♦ recherche d'un modèle du premier ordre : méthode de Broïda

Il existe pratiquement toujours un certain retard dans la réponse des systèmes industriels. On cherche à identifier le procédé par un modèle du type :

$$H(p) = K \frac{\exp(-\tau_0 s)}{1 + \tau_1 s}$$

La méthode appelée méthode de (Victor) Broïda, consiste à mesurer la réponse à t_1 (pour une réponse égale à 28 % de la valeur finale) et à t_2 (pour une réponse égale à 40 % de la valeur finale).



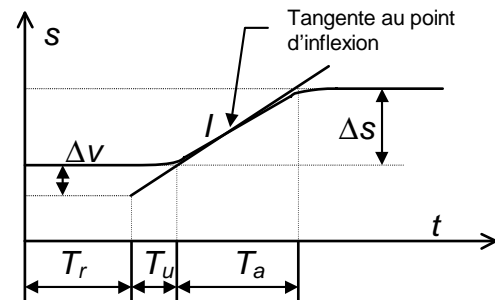
Les valeurs des constantes sont données par les relations :

$$\tau_1 = 5,5(t_2 - t_1) \text{ et } \tau_0 = 2,8t_1 - 1,8t_2$$

$K = \frac{\Delta s}{\Delta e}$ rapport de l'amplitude de sortie à l'amplitude d'entrée.

- ♦ recherche d'un modèle d'ordre supérieur : méthode de Strejc

On cherche à identifier le système avec le modèle : $H(p) = K \frac{\exp(-\tau_0 s)}{(1 + \tau_1 s)^n}$ quand la réponse indicielle a la forme indiquée sur la figure ci-après



On relève les valeurs T_r , T_u , T_a , s et v .

On détermine n et τ_0 avec le tableau :

n	1	2	3	4	5	6
T_u/T_a	0	0,104	0,218	0,319	0,41	0,493
T_u/τ_1	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699

Si l'on obtient une valeur exacte de n , alors $\tau_0 = T_r$

Sinon, on prend la valeur entière immédiatement inférieure et on calcule une nouvelle valeur (fictive) de T_u avec le tableau et on prend : $\tau_0 = T_r + (T_{u_{réel}} - T_{u_{fictif}})$

5.4 – Les systèmes périodiques

On identifie la réponse à un deuxième ordre avec retard

$$H(s) = \frac{K \exp(-\tau_0 s) \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}$$

On mesure le premier et le deuxième dépassement D_1 et D_2 et les instants respectifs t_1 et t_2 pour lesquels ils surviennent. On appelle $T_0 = t_2 - t_1$.

On calcule les paramètres de la FT par les relations :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{et} \quad \frac{D_1}{D_2} = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

K et ω_0 se mesurant directement

Complément : Quelques mots sur l'analyse harmonique d'un SLCI

Un moyen d'étude d'un SLCI consiste en l'analyse du comportement dynamique de celui-ci. Elle est fondée sur l'entrée d'un signal harmonique et sur l'étude de la réponse du système en régime permanent.

C.1 – Caractérisation harmonique d'un SLCI

L'entrée du système est un signal sinusoïdal de la forme : $x(t) = X_0 \cdot \sin \alpha t$. On montre qu'en régime permanent, la réponse d'un SLCI est elle aussi de la forme sinusoïdale avec la même pulsation que le signal d'entrée x , mais déphasée d'un angle par rapport à lui. La réponse a donc la forme

$$y(t) = Y_0 \sin(\alpha t + \varphi)$$

On utilise alors les nombres complexes afin d'étudier l'amplitude Y_0 et la phase de la réponse du SLCI. Introduisons deux variables complexes \bar{x} et \bar{y} définies par :

$$\begin{cases} \bar{x} = X_0 \exp j\omega t \\ \bar{y} = Y_0 \exp j(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

L'entrée x et la sortie y sont respectivement les parties imaginaires de \bar{x} et de \bar{y} .

L'équation différentielle traduisant le comportement du SLCI,

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

peut alors s'écrire dans le domaine complexe,

$$a_n (j\omega)^n \bar{y} + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} \bar{y} + \dots + a_1 (j\omega) \bar{y} + a_0 \bar{y} = b_m (j\omega)^m \bar{x} + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} \bar{x} + \dots + b_1 (j\omega) \bar{x} + b_0 \bar{x}$$

La fonction de transfert du système s'écrit maintenant en fonction de la pulsation

$$H(j\omega) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

et l'amplitude Y_0 et le déphasage entre l'entrée et la sortie se calcule par :

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \cdot |H(j\omega)| \\ \varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) \end{cases}$$

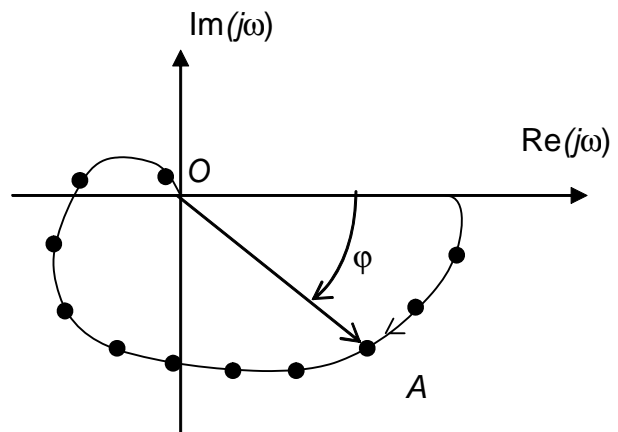
C.2 – Les représentations graphiques de la fonction de transfert d'un SLCI

Les valeurs prises par une fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ dépendent des valeurs de la pulsation ω . Traditionnellement, on représente graphiquement suivant trois diagrammes l'évolution de H en fonction de ω .

C.2.1 – La représentation de Nyquist

Pour chaque valeur de ω , La fonction H est représentée dans le plan complexe par un point d'affixe $H(j\omega)$. Un point A appartenant au lieu décrivant la fonction de transfert est donné par les composantes du vecteur $O\vec{A}$:

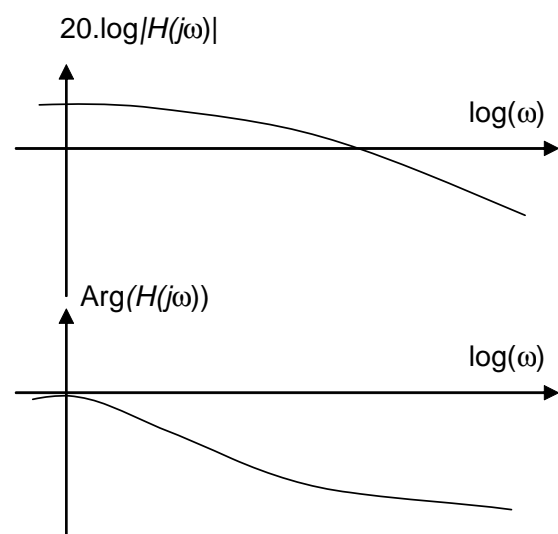
$$O\vec{A} = \begin{pmatrix} \text{Re}(H(j\omega)) \\ \text{Im}(H(j\omega)) \end{pmatrix}$$



On remarque que l'on peut obtenir facilement le module $OA = |H(j\omega)|$, et la phase $\varphi = \text{Arg}(H(j\omega))$ directement sur le graphe. La courbe représentant H est obtenue lorsque l'on fait varier ω de 0 à $+\infty$. **Il est impératif** d'indiquer par une flèche le sens croissant de ω , ainsi qu'une graduation pour une bonne exploitation de la courbe.

C.2.2 – La représentation de Bode

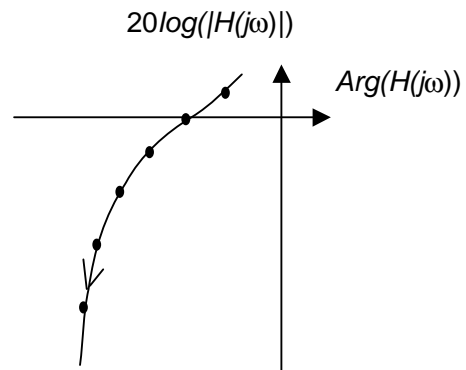
Elle est réalisée à l'aide de deux courbes distinctes : la courbe représentant le module de la fonction de transfert (exprimé en décibel, dB) en fonction de la pulsation, et la courbe représentant la phase de la fonction de transfert (exprimée généralement en degré) en fonction de la pulsation. Rappelons que le module exprimé en décibels correspond à $20 \log |H(j\omega)|$ (logarithme décimal). Les axes des abscisses sont gradués sur une échelle logarithmique (on parle de graphiques semi-logarithmiques).



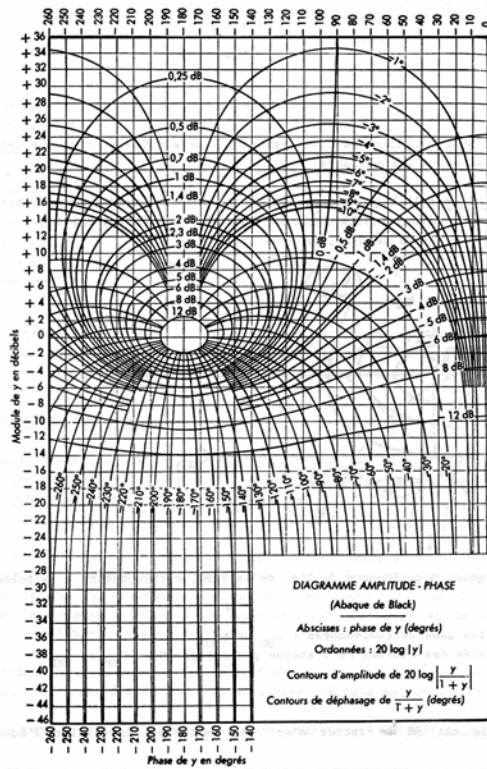
Un intérêt de la représentation de Bode est issu de la propriété des logarithmes : Si une fonction de transfert H est le produit de deux fonctions F et G , le graphique de H se déduit aisément, par "addition" des graphes représentant respectivement F et G par :

$$\begin{cases} 20\log|H(j\omega)| = 20\log|F(j\omega)| + 20\log|G(j\omega)| \\ \text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(F(j\omega)) + \text{Arg}(G(j\omega)) \end{cases}$$

On représente souvent approximativement les deux courbes du diagramme de Bode par un tracé asymptotique composé de segments de droites. Attention à certains risques lors de cette simplification qui ne fait pas apparaître, par exemple, les résonances du système.



C.2.3 – La représentation de Black



Ce diagramme (également appelé diagramme de Nichols) consiste à représenter le lieu d'une fonction de transfert H dans un plan ayant pour axe des abscisses la phase exprimée en degré, et pour axe des ordonnées le module de H exprimé en décibel. Comme pour le diagramme de Nyquist, il est impératif d'indiquer sens et graduations sur la courbe pour une bonne exploitation. Comme pour la représentation de Bode, le diagramme de Black possède la propriété additive citée en C.2.2.

L'abaque de Black, ci-contre, permet à partir du tracé du lieu représentant la FTBO, de tracer directement, le lieu représentant la FTBF : en effet, les courbes non rectilignes réalisent la transformation géométrique :

$$\beta(j\omega) \rightarrow \frac{\beta(j\alpha)}{1 + \beta(j\omega)}$$

qui correspond au passage FTBO FTBF pour un retour unitaire.

Le saviez-vous ? Le terme « robot », est emprunté au tchèque *robota* (travail forcé) par l'écrivain Karel Capek pour désigner des « ouvriers artificiels » dans sa pièce *Les Robots universels de Rossum*.



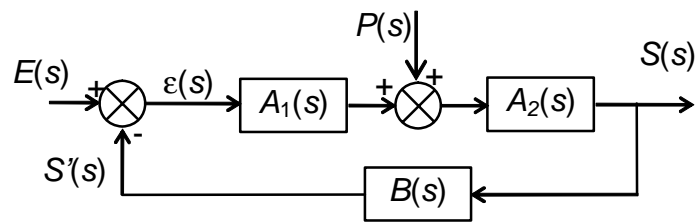
Pierre-Simon LAPLACE

TRANSFORMEES DE LAPLACE

$f(t)$	$F(s)$
$f(a.t)$	$(1/a)F(s/a)$
$\exp(-\omega t)f(t)$	$F(s + \omega)$
$f'(t)$	$s.F(s) - f(0+)$
$-t f(t)$	$F'(s)$
$t^2 f(t)$	$F''(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t - \tau)$	$\exp(-s\tau)F(s)$
$K u(t)$	K/s
$K t u(t)$	K/s^2
$\exp(at)f(t)u(t)$	$F(s - a)$
$\exp(-at) u(t)$	$\frac{1}{s + a}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$(1 - \exp(-t/\tau))u(t)$	$\frac{1}{s(1 + \tau s)}$
$\exp(at)t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$(\sin \alpha t)u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$(\cos \alpha t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$(\sinh \alpha t)u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
$(\cosh \alpha t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
$\exp(-at)(\sin \alpha t)u(t)$	$\frac{\alpha}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\exp(-at)(\cos \alpha t)u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \exp(-\zeta \omega t) \sin(\omega \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right) u(t)$	$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\alpha} s + \frac{1}{\alpha^2} s^2}$
$\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \exp(-\zeta \omega t) \sin(\omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) \right) u(t)$ avec $\sin \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2}$ et $\cos \varphi = \zeta$	$\frac{1}{s \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega} s + \frac{1}{\omega^2} s^2 \right)}$

Précision des systèmes asservis

Considérons le système dont le schéma bloc fait apparaître une entrée et une perturbation.



Par définition, le système sera d'autant plus précis que son signal d'écart ou d'erreur $\varepsilon(s)$ est faible.

Une erreur transitoire est appelée erreur dynamique. Une erreur permanente est nommée erreur statique.

Le calcul montre que l'écart est donné par

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + A_1(s)A_2(s)B(s)} E(s) - \frac{A_2(s)B(s)}{1 + A_1(s)A_2(s)B(s)} P(s)$$

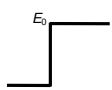
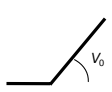
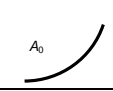
En utilisant le théorème de la valeur finale, il est possible de calculer l'erreur statique. On a

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s)$$

On constate notamment que pour une entrée nulle et une perturbation en échelon, la présence d'un intégrateur en amont de la perturbation annule l'erreur. Le système est alors dit astatique.

Le tableau suivant donne un moyen de connaître l'erreur statique vis à vis des entrées canoniques en fonction de la classe de la FTBO d'un système.

Tableau donnant la **précision** d'un système à partir de sa FTBO de gain K

entrée \ classe	0	1	2
Échelon 	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe 	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Accélération 	∞	∞	$\frac{A_0}{K}$