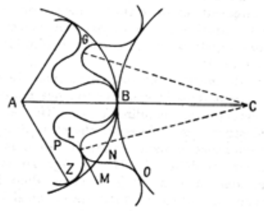


1

Cinématique du solide indéformable

« Je te donne un bonbon, tu me donnes un bonbon, nous avons chacun un bonbon.
Je te donne une idée, tu me donnes une idée, nous avons chacun deux idées. »
Proverbe américain

1 – Solide indéformable

1.1 – Relation de base

La distance de deux points quelconques d'un solide indéformable demeure invariable quelque soit le temps.

L'hypothèse de l'indéformabilité du solide se traduit par :

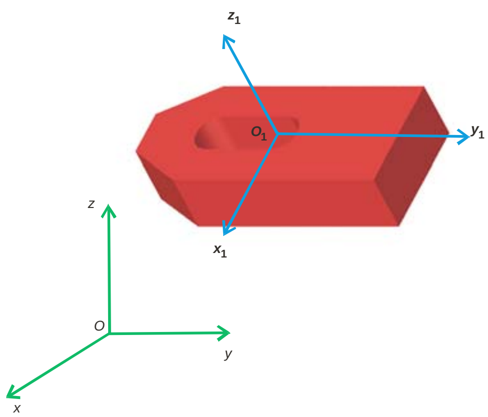
Soient deux points A et B d'un solide indéformable (S). On a

$$\boxed{\overline{AB}^2 = \text{constante}}$$

Remarquons tout de suite que cette hypothèse ne s'appliquera qu'après une étude de sa compatibilité avec les conditions réelles en rapport avec ce solide : matériaux, géométrie, surface, actions mécaniques, type d'étude,… On ne pourra pas, par exemple, faire l'hypothèse de solide indéformable pour étudier le mouvement d'un pneumatique sur une route accidentée !

1.2 – Repère attaché au solide

La notion de repère est directement déduite de l'hypothèse du solide indéformable. On peut donc « attacher » un repère à un solide indéformable en considérant 4 points non coplanaires liés au solide dont l'un est l'origine du repère et les trois autres les extrémités des vecteurs de la base du repère.



1.3 – Position du solide

Pour paramétrer un solide, il faut fixer la position de 3 points liés au solide, c'est-à-dire 9 paramètres. De plus, les 3 points ont une distance constante traduite par 3 équations de liaison des paramètres.

La position d'un solide dépend de 6 paramètres indépendants.

Un choix *possible* des paramètres par rapport à un repère est par exemple :

- la position du point O_1 dans R ;
- les trois angles d'Euler[2].

2 – Repérage du solide indéformable

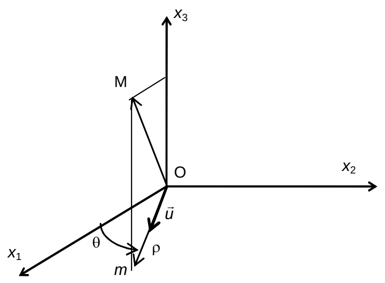
[1] Longueur et disposition des dents de roues engrenant l'une sur l'autre. Quand la dent ONL cesse de travailler sur la dent PZ, la dent BG doit commencer à travailler sur la dent correspondante de la roue A. (Philippe de LA HIRE, *Traité des épicycloïdes*).LA HIRE (1640 – 1718).
[2] Définis par la suite.

2.1 – Coordonnées cartésiennes $\boxed{(x_1, x_2, x_3)}$ pour mémoire

2.2 – Coordonnées cylindriques $\boxed{(\rho, \theta, x_3)}$

$\boxed{\vec{OM} = \rho\vec{u} + x_3\vec{e}_3}$

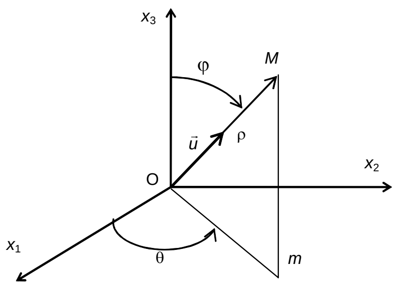
en projection sur le repère cartésien



2.3 – Coordonnées sphériques $\boxed{(\rho, \theta, \varphi)}$

$\boxed{\vec{OM} = \rho\vec{u}}$

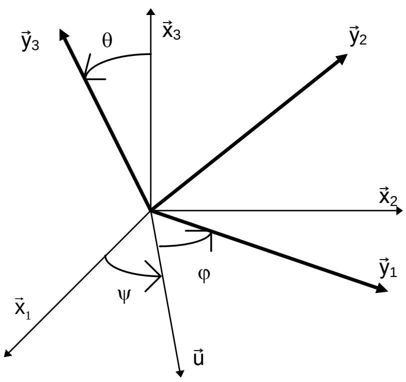
en projection sur le repère cartésien



$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ x_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

2.4 – Angles d'Euler

Une base orthonormée se déduit d'une autre base orthonormée par une rotation de l'espace définie par 3 paramètres. On utilise fréquemment les angles d'Euler dont la définition est donnée ci-après.



Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ deux bases orthonormées de l'espace vectoriel E_3.

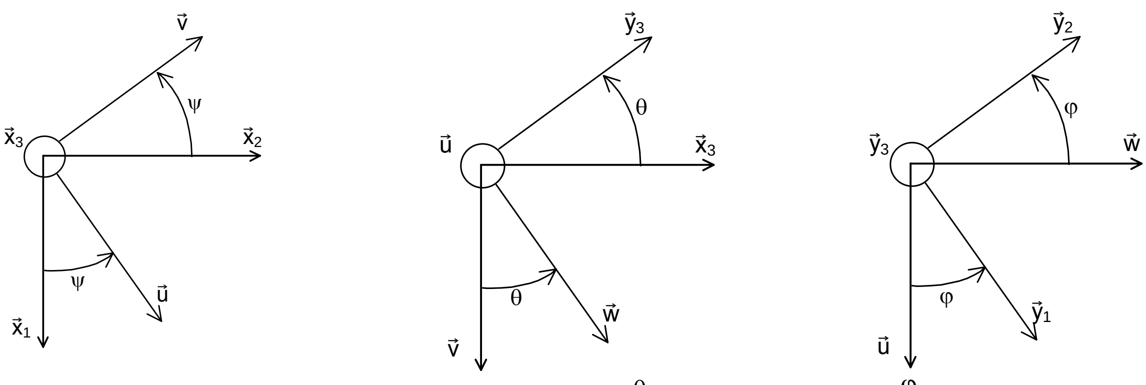
Soit $\vec{u}$ un vecteur appartenant à l'intersection des plans $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

Les trois angles d'Euler permettent de paramétrer une base par rapport à une autre. Ils sont définis par

$\psi = (\vec{x}_1, \vec{u})$, angle de précession orienté par $\vec{x}_3$,

$\theta = (\vec{x}_3, \vec{y}_3)$, angle de nutation orienté par $\vec{u}$,

$\varphi = (\vec{u}, \vec{y}_1)$, angle de rotation propre orienté par $\vec{y}_3$.



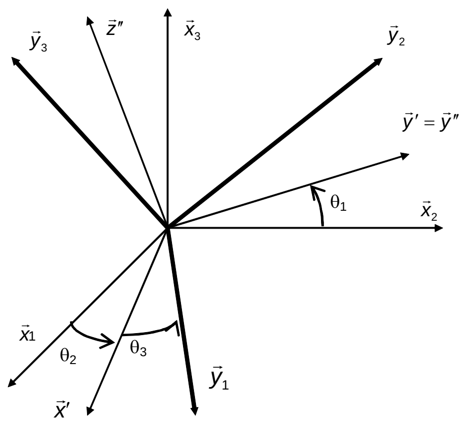
$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \xrightarrow{\psi} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}_3) \xrightarrow{\theta} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{y}_3) \xrightarrow{\varphi} (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$$

La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{x}_3)$ est appelée première base intermédiaire ;
La base $(\vec{u},\vec{w},\vec{y}_3)$ est appelée deuxième base intermédiaire.

La droite dirigée par $\vec{u}$ s'appelle la droite des noeuds. On a $\vec{u} = \dfrac{\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_3}{\left\|\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_3\right\|}$

3.5 – Angles de Cardan ou angles RTL (roulis, tangage et lacet)

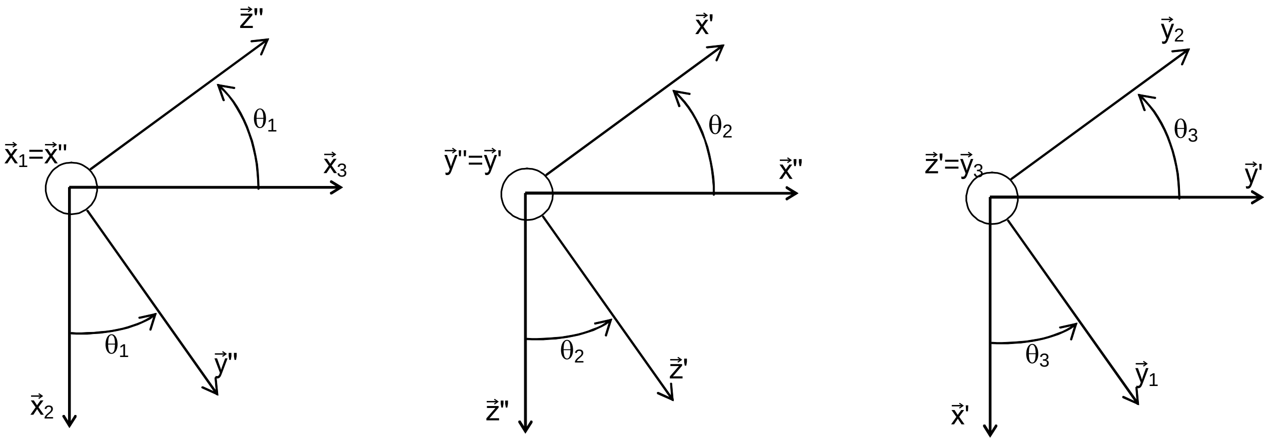
On note θ_1, θ_2 et θ_3 les angles de Cardan permettant le passage du repère R_1 $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ au repère R_2 $(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\vec{y}_3)$ par l'intermédiaire des deux repères *R''* et *R'*.



Les angles sont définis sur la figure ci-contre.

On a le passage suivant :

$$(\vec{x}_i) \xrightarrow{r(X,\theta_1)} (\vec{x}_i'') \xrightarrow{r(Y,\theta_2)} (\vec{x}_i') \xrightarrow{r(Z,\theta_3)} (\vec{y}_i)$$



3 – **Dérivation vectorielle**

3.1 – Définition

Soit la base orthonormée directe $B = (\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ de l'espace vectoriel E_3.

On considère l'application de classe C^1 de *R* dans E_3 définie par : $t \to \vec{v}(t)$

La dérivée du vecteur $\vec{v}(t)$ par rapport à *t* est le vecteur : $\left[\dfrac{d}{dt}\vec{v}(t)\right]_B$ tel que

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{v}(t)\right]_B = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{v}(t+h)-\vec{v}(t)}{h}$$

3.2 – Formule de la base mobile

C'est la relation FONDAMENTALE de base de la cinématique..

Soit la base orthonormée directe $B_1 = (\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ de l'espace vectoriel E_3.

Soit la base orthonormée directe $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ de l'espace vectoriel E_3 dépendant du paramètre t par rapport à la première base.

– Calculons $\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1}$, $\left[\dfrac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1}$ et $\left[\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1}$

$B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ orthonormée impose

$$\vec{x}_2^2 = 1 \text{ d'où } \vec{x}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ posons alors } \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} = \gamma\vec{y}_2 + \delta\vec{z}_2$$

$$\vec{y}_2^2 = 1 \text{ d'où } \vec{y}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ posons alors } \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} = \sigma\vec{x}_2 + \alpha\vec{z}_2$$

$$\vec{z}_2^2 = 1 \text{ d'où } \vec{z}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ posons alors } \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} = \xi\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2$$

de plus

$$\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0 \text{ d'où } \vec{y}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} + \vec{z}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ soit } \xi = -\alpha$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0 \text{ d'où } \vec{x}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} + \vec{z}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ soit } \delta = -\beta$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 = 0 \text{ d'où } \vec{x}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} + \vec{y}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} = 0 \text{ soit } \sigma = -\gamma$$

ce qui conduit finalement aux trois relations :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} = \gamma\vec{y}_2 - \beta\vec{z}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{x}_2$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} = \alpha\vec{y}_2 - \gamma\vec{z}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} = \beta\vec{y}_2 - \alpha\vec{z}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{z}_2$$

dans lesquelles on a posé : $\vec{\omega} = \vec{\omega}(B_2 / B_1) = \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2 + \gamma\vec{z}_2$. C'est le vecteur **taux rotation** de la base B_2 par rapport à la base B_1.

– Calculons $\left[\dfrac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_2}$ en fonction de $\left[\dfrac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_1}$

Soit $\vec{U}(t) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ $\vec{U}(t) = x_2\vec{x}_2 + y_2\vec{y}_2 + z_2\vec{z}_2$.

La dérivée de ce vecteur dans la base B_2 s'écrit : $\left[\dfrac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_2}$

La dérivée de ce vecteur dans la base B_1 s'écrit : $\left[\dfrac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_1}$

On a :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_2} = \frac{dx_2}{dt}\vec{x}_2 + \frac{dy_2}{dt}\vec{y}_2 + \frac{dz_2}{dt}\vec{z}_2$$

et

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_1} = \frac{dx_2}{dt}\vec{x}_2 + \frac{dy_2}{dt}\vec{y}_2 + \frac{dz_2}{dt}\vec{z}_2 + x_2\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} + y_2\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} + z_2\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1}$$

Or, on a $\quad x_2\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{B_1} + y_2\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{B_1} + z_2\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{B_1} = \vec{\omega}(B_2/B_1)\wedge\vec{U}(t)$

On en déduit la relation fondamentale de la dérivée d'un vecteur dans deux bases différentes dont l'une dépendant d'un paramètre par rapport à l'autre.

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_1} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{B_2} + \vec{\omega}(B_2/B_1)\wedge\vec{U}(t)}$$

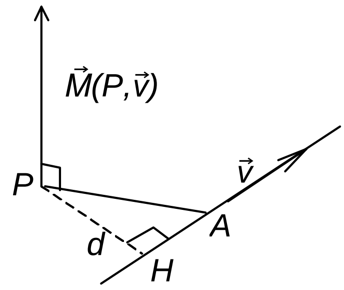
4 – Moments d'un vecteur

Si l'outil mathématique « vecteur » est bien adapté à l'étude mécanique du point, il existe un autre concept mathématique qui permet une étude rationnel de la mécanique du solide indéformable : il s'agit du torseur.

4.1 – Moment d'un vecteur par rapport à un point

Soit un vecteur $\vec{v}$ de l'espace et une droite D dirigée par $\vec{v}$. On appelle vecteur glissant le couple $(\vec{v}, D)$.

Soit un point A de D. Le moment du vecteur glissant $(\vec{v}, D)$ par rapport à un point P de l'espace est défini par :



$$\vec{M}(P,\vec{v}) = \vec{PA}\wedge\vec{v}$$

Remarques :

– ce moment est indépendant du point A de D.

– si H est la projection orthogonale de P sur D, on a facilement la norme du moment $\vec{M}(P,\vec{v})$

$$\vec{M}(P,\vec{v}) = \vec{PA}\wedge\vec{v} = (\vec{PH}+\vec{HA})\wedge\vec{v} = \vec{PH}\wedge\vec{v}$$

$\left\|\vec{M}(P,\vec{v})\right\| = \left\|\vec{PH}\wedge\vec{v}\right\| = d\left\|\vec{v}\right\|$, dans laquelle d est la distance de P à la droite D.

4.2 – Changement de point

Soit un vecteur glissant $(\vec{v}, D)$, un point A de D et deux points M et P de l'espace. Calculons la relation entre les moments en M et en P. On a

$$\vec{M}(M,\vec{v}) = \vec{MA}\wedge\vec{v}$$

Et $\vec{M}(P,\vec{v}) = \vec{PA}\wedge\vec{v}$, or, d'après la relation de Chasles, on peut écrire,

$\vec{PA}\wedge\vec{v} = \vec{PM}\wedge\vec{v} + \vec{MA}\wedge\vec{v}$, d'où l'on tire

$$\boxed{\vec{M}(P,\vec{v}) = \vec{M}(M,\vec{v}) + \vec{PM}\wedge\vec{v}}$$

4.3 – Moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe

Soit un droite *D* et un point *A* de cette droite. Soit un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$, un point *B* de cet axe et le vecteur glissant $(\vec{v},D)$. Le moment de ce vecteur glissant par rapport à l'axe Δ, se calcule en *A* par

$$M(\Delta,\vec{v})=\vec{u}.\vec{M}(B,\vec{v})$$

Remarquons que

$$M(\Delta,\vec{v})=\vec{u}.\vec{M}(B,\vec{v})=\vec{u}\cdot\left(\vec{BA}\wedge\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{BA},\vec{v}\right).$$

4.4 – Relation entre moment et champ équiprojectif

Tout champ équiprojectif est un champ de moment et réciproquement.

Soit un vecteur glissant $(\vec{v},D)$, et deux points *A* et *B* de l'espace. On a

$$\vec{M}(A,\vec{v})=\vec{M}(B,\vec{v})+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}$$

Si l'on effectue le produit scalaire par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, on trouve

$\vec{M}(A,\vec{v})\cdot\vec{AB}=\vec{M}(B,\vec{v})\cdot\vec{AB}+\left(\vec{AB},\vec{v},\vec{AB}\right)$, d'où l'on peut tirer

$$\boxed{\vec{M}(A,\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{M}(B,\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}}$$

La réciproque est vraie. On ne la démontrera pas dans ce cours.

5 – Torseur

5.1 – Définition d'un torseur par ses éléments de réduction en un point

On appelle torseur, l'ensemble des deux champs de vecteurs :

- un champ uniforme $\vec{R}$, appelé résultante du torseur,
- un champ équiprojectif $\vec{M}$, appelé moment du torseur en un point.

Ces deux champs se nomment les **éléments de réduction** du torseur en un point. On note

$$T=\underset{A}{\begin{cases}\vec{R}\\ \vec{M}(A)\end{cases}}$$

le torseur T réduit au point *A*.

4.2 – Invariants d'un torseur

On appelle invariants d'un torseur, les quantités qui restent constantes quel que soit le point où on réduit le torseur.

- La résultante $\vec{R}$ est invariante pour un torseur donné.

- L'invariant scalaire est : $I=\vec{R}\cdot\vec{M}(A)$

En effet, si *B* est un point de l'espace : $\vec{M}(B,\vec{v})=\vec{M}(A,\vec{v})+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{v}$. On en déduit, en multipliant par $\vec{R}$ que

$$\vec{R}\cdot\vec{M}(B)=\vec{R}\cdot\vec{M}(A)$$

▪ L'invariant vectoriel est : $\vec{I} = I\dfrac{\vec{R}}{\vec{R}^2}$

4.3 – Axe central d'un torseur

On appelle **axe central** d'un torseur, l'ensemble des points M pour lequel la résultante et le moment en M sont colinéaires. Le coefficient de linéarité s'appelle le pas du torseur.

$$\vec{M}(M) = \lambda\vec{R} \Leftrightarrow M \text{ appartient à l'axe central de } T$$

λ est appelé le pas du torseur.

▪ Si $\vec{R}$ est nul, tout point de l'espace convient ;

▪ Si $\vec{R}$ est non nul, supposons connu les éléments de réduction du torseur au point A. On a

$$T = {}_A\begin{cases}\vec{R}\\ \vec{M}(A)\end{cases}$$

et donc

$$\vec{M}(M) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AM}$$

c'est-à-dire

$$\vec{M}(M) - \vec{M}(A) = \vec{R} \wedge \vec{AM}$$

pour déterminer le vecteur $\vec{AM}$, effectuons la division vectorielle qui est possible car on a

$$\left[\vec{M}(M) - \vec{M}(A)\right]\cdot\vec{R} = 0$$

On en tire $\boxed{\vec{AM} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{\vec{R}^2} + \lambda\vec{R}}$

C'est l'équation vectorielle de l'axe central.

On appellera **moment central**, la valeur du champ de moment en un point de l'axe central.

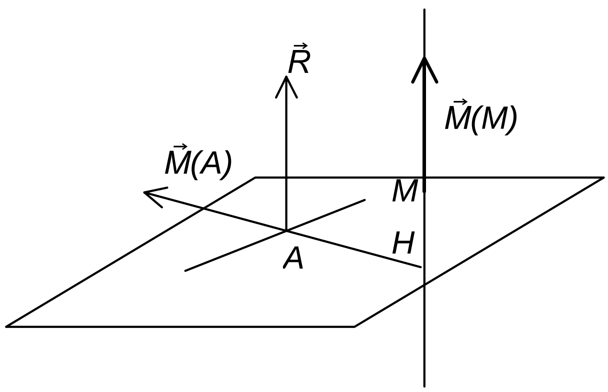
Remarquons les propriétés de l'axe central :

▪ Le moment est invariant pour tout point de l'axe central ;

▪ La norme du moment est minimum en tout point de l'axe central.

La position du point H intersection du plan normal à $\vec{R}$ passant par A et l'axe central est donnée par

$$\vec{AH} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{\vec{R}^2}$$



4.4 – Opérations sur les torseurs

4.4.1 – Addition de deux torseurs

Soit T_1 et T_2, deux torseurs réduits au même point A. On a

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{array} \right._A \qquad \text{et} \qquad T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{array} \right._A$$

On définit la somme des deux torseurs T_1 et T_2, par le torseur T tel que

$$T = T_1 + T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1(A) + \vec{M}_2(A) \end{array} \right._A$$

4.4.2 – Multiplication d'un torseur par un réel

Soit le torseur T réduit en A : $T = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right._A$ et λ un réel. On définit le torseur λT par

$$\lambda T = \left\{ \begin{array}{l} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M}(A) \end{array} \right._A$$

4.4.3 – Comoment de deux torseurs

Soit T_1 et T_2, deux torseurs réduits au **même** point A. On a

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{array} \right._A \qquad \text{et} \qquad T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{array} \right._A$$

On définit le comoment (ou produit « en croix ») de ces torseurs par

$$\boxed{T_1 \otimes T_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(A)}$$

Le comoment ne dépend pas du point de réduction.

4.4.4 – Dérivation d'un torseur

Considérons un torseur $\{T\}$ dépendant d'un paramètre t, et dont les éléments de réduction aux points respectifs A et B sont :

$T = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right._A$ et $T = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{array} \right._B$. On sait que l'on peut écrire : $\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R}$.

Dérivons cette dernière expression par rapport à t. On a :

$\dfrac{d\vec{M}(A)}{dt} = \dfrac{d\vec{M}(B)}{dt} + \dfrac{d\vec{AB}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{AB} \wedge \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{d\vec{M}(B)}{dt} + \dfrac{d\vec{OB}}{dt} \wedge \vec{R} - \dfrac{d\vec{OA}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{AB} \wedge \dfrac{d\vec{R}}{dt}$, ou encore $\dfrac{d\vec{M}(A)}{dt} + \dfrac{d\vec{OA}}{dt} \wedge \vec{R} = \dfrac{d\vec{M}(B)}{dt} + \dfrac{d\vec{OB}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{AB} \wedge \dfrac{d\vec{R}}{dt}$. On pose alors pour un point M quelconque, $\vec{m}(M) = \dfrac{d\vec{M}(M)}{dt} + \dfrac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{R}$ .On vérifie alors que : $\vec{m}(A) = \vec{m}(B) + \vec{AB} \wedge \dfrac{d\vec{R}}{dt}$, qui est bien la relation fondamentale de changement de point d'un moment d'un torseur. On peut donc écrire que la dérivée d'un torseur T, notée $\dfrac{dT}{dt}$ vaut en A

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{R}}{dt} \\ \dfrac{d\vec{M}(A)}{dt} + \dfrac{d\vec{OA}}{dt} \wedge \vec{R} \end{array} \right._A}.$$

4.5 – Torseurs particuliers

Outre le torseur nul dont les éléments de réduction sont nuls en tout point, on définit :

4.5.1 – Couple

C'est un torseur de résultante nulle pour lequel il existe un point où le moment est non nul. Ce moment est alors constant pour tout point de l'espace.

$$C = \begin{cases} 0 \\ \vec{M} \end{cases}$$

Les invariants scalaire et vectoriel d'un couple sont nuls.

La somme de deux couples est un couple.

4.5.2 – Glisseur

C'est un torseur de résultante non nulle, qui admet un point *M* pour lequel le moment est nul.

$$G = {}_A\begin{cases} \vec{R} \\ 0 \end{cases}$$

Il admet alors une droite de points pour lesquels le moment est nul. Cette droite est dirigée par $\vec{R}$. Si *A* est un point de cette droite, $(A, \vec{R})$ est un vecteur glissant. La droite de moment nul est l'axe central du torseur. Son pas est nul. Son invariant scalaire est nul.

5 – **Rappels de cinématique du point** (vu en physique)

5.1 – Définition

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes de ces mouvements.

5.2 – Paramétrage

Les deux paramètres de la cinématique du point sont la position et le temps. Le premier est relatif au repère utilisé pour l'exprimer, le second est absolu en mécanique classique.

Nous utiliserons toujours des repères orthonormés directs dans ce cours.

Soit un repère *R* $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'espace. La position d'un point *M* par rapport à ce repère est donnée par le vecteur $\vec{OM}$ tel que :

$\vec{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$,   (*x*,*y*,*z*) sont les coordonnées cartésiennes de *M* dans *R.*

La *trajectoire* est le lieu des positions du point *M* quand *t* décrit *R*.

On peut exprimer la position de *M* en coordonnées cylindriques ou sphériques par exemple.

5.3 – Vitesse d'un point par rapport à un repère

La vitesse d'un point *M* par rapport au repère *R*, est la dérivée par rapport au temps du vecteur position défini dans *R*.

$$\vec{V}(M/R)=\left[\frac{d\vec{M}}{dt}\right]_R$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant dans le repère *R*, mais ses composantes peuvent être données dans tout autre repère.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point.

Expressions :

en coordonnées cartésiennes : $\vec{V}(M/R)=\frac{dx}{dt}\vec{x}+\frac{dy}{dt}\vec{y}+\frac{dz}{dt}\vec{z}$

en coordonnées cylindriques : $\vec{V}(M/R)=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z$

remarque : on note souvent : $\frac{da}{dt}=\dot{a}$ et $\frac{d\dot{a}}{dt}=\ddot{a}$

5.4 – Hodographe

Soit un point quelconque *A* de l'espace, l'hodographe du mouvement d'un point *M* par rapport à un repère *R* est le lieu des points *P* tel que

$$\vec{AP}=\vec{V}(M/R)$$

5.5 – Accélération d'un point par rapport à un repère

L'accélération d'un point *M* par rapport au repère *R*, est la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position défini dans *R*.

$$\vec{a}(M/R)=\left[\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}\right]_R$$

On en déduit que l'accélération de *M* est la dérivée dans *R* de la vitesse de *M*.

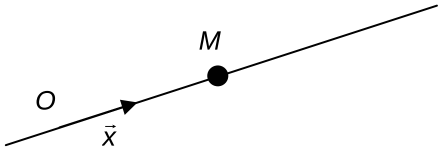
en coordonnées cartésiennes : $\vec{a}(M/R)=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{x}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{y}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{z}$

On dérive le vecteur vitesse par rapport à *R*, mais on peut exprimer l'accélération dans un autre repère.

L'accélération est tangente à l'hodographe du mouvement du point.

5.6 – Mouvements particuliers

5.6.1 - Mouvement rectiligne



La trajectoire du point *M* est une droite.

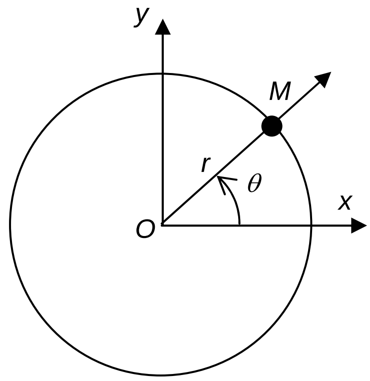
On suppose que $\vec{x}$ est le vecteur unitaire de la droite du mouvement. On a alors

$$\vec{OM}=x\vec{x} \qquad \vec{V}(M/R)=\frac{dx}{dt}\vec{x} \qquad \vec{a}(M/R)=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{x}$$

si $\dot{x}$ est constant, l'accélération est nulle et le mouvement est rectiligne et uniforme.
si $\ddot{x}$ est constant, le mouvement est rectiligne et uniformément varié.

5.6.2 – Mouvement circulaire

La trajectoire du point *M* est un cercle de rayon *r*. En choisissant un repère *R* $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ tel que le point *O* soit le centre du cercle situé dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$, on a



$\vec{OM} = r(\cos\theta\vec{x} + \sin\theta\vec{y})$ dans laquelle θ est fonction du temps *t*.

La vitesse du point *M* par rapport à *R* est alors donnée par

$$\vec{V}(M/R) = r\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{x} + \cos\theta\vec{y})$$

L'accélération du point *M* par rapport à *R* est donnée par

$$\vec{a}(M/R) = r\left[\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{x} + \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{y}\right]$$

Le problème se traite d'une manière plus élégante en coordonnées polaires.

5.7 – Changement de repère

On suppose que le point *M* est repéré par rapport à deux repères $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $R'(O',\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$.

- La relation entre **la position** dans *R* et celle dans *R*' est donnée par

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}} \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

- La relation entre **la vitesse** dans *R* et celle dans *R*' est donnée par dérivation de l'expression précédente dans *R*

$$\left[\frac{d\vec{OM}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right]_R + \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right]_R$$

Les deux premiers termes sont respectivement $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{V}(O'/R)$

Pour calculer le troisième terme, on utilise la relation de dérivation vectorielle, et l'on obtient :

$$\left[\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}$$

d'où

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M} + \vec{V}(M/R')}$$

$\vec{V}(M/R)$ est la vitesse absolue de *M* dans *R* ;

$\vec{V}(M/R')$ est la vitesse relative de *M* dans *R*.

$\vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}$ est la vitesse d'entraînement de *M* dans le mouvement de *R*' par rapport à *R*.

On a alors la relation $\boxed{\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R') + \vec{V}(M,R'/R)}$

qui se lit : la vitesse du point *M* par rapport au repère *R* est égale à la vitesse du point *M* par rapport à *R*' augmentée de la vitesse du point *M* supposé attaché à *R*' (point coïncident) par rapport à *R*.

◆ La relation entre **l'accélération** dans *R* et celle dans *R*' est donnée par dérivation de l'expression précédente dans R :

Si l'on dérive la relation sur les vitesses, on obtient

$$\vec{a}(M/R)=\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge\vec{O'M}+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left[\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right]_R+\left[\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right]_R$$

En tenant compte des relations de dérivation vectorielle, on obtient :

$$\vec{a}(M/R)=\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge\vec{O'M}+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left[\vec{V}(M/R')+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right]+\vec{a}(M/R')+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')$$

ou encore

$$\boxed{\vec{a}(M/R)=\vec{a}(M/R')+\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge\vec{O'M}+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right)+2\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')}$$

On pose habituellement

$\vec{a}(M/R')$: accélération relative de *M* dans *R*' ;

$\vec{a}(M,R'/R)=\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge\vec{O'M}+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right)$: accélération d'entraînement de *M* supposé fixe dans *R*' dans le mouvement de *R*' par rapport à *R* ;

$2\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')$: accélération complémentaire ou de Coriolis.

L'utilisation de ces relations sur l'accélération se révèle rapidement délicate, et il vaut mieux calculer la vitesse et dériver ensuite.

6 – Cinématique du solide indéformable

6.1 – Champ des vitesses d'un solide indéformable

6.1.1 – Relation entre les vitesses des points d'un solide

Soit le mouvement d'un solide (*S*) par rapport à un repère *R*. Soit *A* et *B* deux points de (*S*).

On a $\vec{AB}^2=\text{constante}$ *i.e.* $\left(\vec{OB}-\vec{OA}\right)^2=c$

En dérivant par rapport au temps dans le repère *R*, il vient

$$\left(\vec{V}(B,S/R)-\vec{V}(A,S/R)\right)\cdot\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)=0$$

ou encore

$$\boxed{\left(\vec{V}(B,S/R)-\vec{V}(A,S/R)\right)\cdot\vec{AB}=0}$$

6.1.2 – Torseur cinématique

On caractérise donc le champ des vitesses des points d'un solide par son torseur cinématique appelé également le distributeur des vitesses de (*S*).

Si l'on attache un repère *R*' en *A* au solide (*S*), en appliquant la relation de changement de point pour un point *B* du solide (*S*), on obtient :

$$\vec{V}(B,S/R)=\vec{V}(A,S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\vec{AB}$$

On reconnaît ici la résultante du torseur cinématique qui est ici le vecteur rotation du solide (*S*) par rapport à *R*.

$$\boxed{V(S/R)=\underset{A}{}\begin{cases}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A,S/R)\end{cases}}$$

Soit un repère *R* $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace. On peut projeter ce torseur sur le repère *R*. On obtient

$$V(S/R)=\underset{A}{}\begin{cases}\vec{\Omega}(S/R)=p\vec{x}+q\vec{y}+r\vec{z}\\ \vec{V}(A,S/R)=u\vec{x}+v\vec{y}+w\vec{z}\end{cases}$$

6.1.3 – Propriétés du torseur cinématique

Elles découlent des propriétés des torseurs.

- **Axe central**

L'axe central du torseur est appelé Axe Instantané de Rotation et de Glissement (AIRG). Il est colinéaire au vecteur rotation à l'instant *t*.

- **Surfaces axoïdes**

C'est l'ensemble des positions de l'AIRG dans *R* au cours du temps.

- **Torseurs particuliers**

couple : A un instant donné, le vecteur rotation est nul et tous les points du solide ont même vitesse. Le solide est à cet instant en mouvement de translation. L'AIRG n'est pas défini dans ce cas.

Glisseur : Si le vecteur rotation est non nul et si l'invariant scalaire est nul, il existe des points du solide à vitesse nulle. Ces points sont sur l'axe central du torseur qui est l'axe instantané de rotation (AIR) du distributeur. A cet instant, le mouvement est une rotation autour de l'AIR.

6.2 – Roulement sans glissement

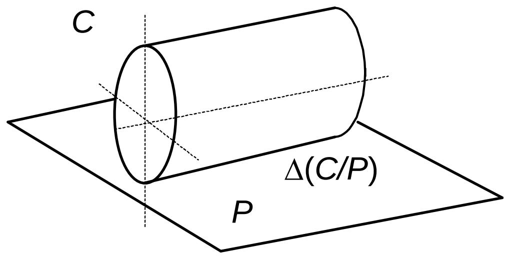
6.2.1 – Définition

Supposons qu'il existe à l'instant t un point *I* tel que : $\vec{V}(I,S/R)=0$.

Le point *I* appartient alors à l'axe central du torseur cinématique du mouvement de (*S*) par rapport à *R* (AIR). Si *M* vérifie également cette propriété, il est sur cet AIR. A cet instant, la surface axoïde liée à (*S*) roule sans glisser sur la surface axoïde liée à *R*.

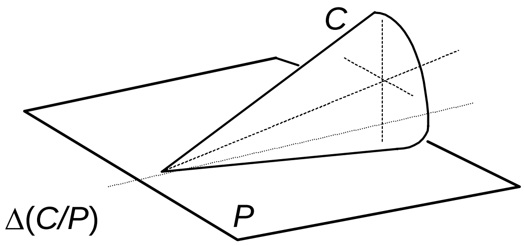
6.2.2 – Exemples

cylindre de révolution sur un plan



Le cylindre de révolution *C* est en contact avec le plan *P* le long d'une génératrice.
Si la condition de roulement sans glissement s'applique en tout point du contact, cette génératrice est alors l'axe instantané de rotation Δ(*C/P*).

cône de révolution sur plan



Le cône de révolution *C* est en contact le long d'une génératrice avec le plan. Si la condition de roulement sans glissement s'applique en tout point du contact, cette génératrice est alors l'axe instantané de rotation du mouvement du cône sur le plan.

6.2.3 – Cas de plusieurs solides

Si le solide 1 roule sans glisser sur le solide 2, que le solide 2 roule sans glisser sur le solide 3 et que le solide 3 roule sans glisser sur le solide 1 (non nécessairement sur des surfaces réelles) le AIR Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31} sont concourants (éventuellement à l'infini).

6.3 – Champ des accélérations d'un solide

À partir de la relation de moment du champ des vitesses d'un solide,

$$\vec{V}(B,S/R)=\vec{V}(A,S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge \vec{AB}$$

et en dérivant cette expression dans *R*, on obtient, après calculs :

$$\boxed{\vec{a}(B,S/R)=\vec{a}(A,S/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge \vec{AB}+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R)\wedge \vec{AB}\right)}$$

Remarquons que le champ des accélérations d'un solide n'est pas équiprojectif : ce n'est pas le champ de moment d'un torseur.

6.4 – Composition des mouvements

6.4.1 – Composition des vitesses

Soit un repère *R* $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace, et soit un repère *R*' $(O',\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$ lié au solide (*S*).

Soit un point *M* de (*S*), on sait (voir § 5) que

$$\boxed{\vec{V}(M,S/R)=\vec{V}(M,S/R')+\vec{V}(M,R'/R)}$$

On aurait de même

$$\vec{V}(M,S/R')=\vec{V}(M,S/R)+\vec{V}(M,R/R')$$

On en déduit

$$\vec{V}(M,R'/R)=-\vec{V}(M,R/R')$$

La relation précédente se généralise à plusieurs repères, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\vec{V}(M,S/R_n)=\vec{V}(M,S/R_{n-1})+\vec{V}(M,R_{n-1}/R_n)\\
&\vec{V}(M,S/R_{n-1})=\vec{V}(M,S/R_{n-2})+\vec{V}(M,R_{n-2}/R_{n-3})\\
&\ldots\\
&\vec{V}(M,S/R_1)=\vec{V}(M,S/R_0)+\vec{V}(M,R_0/R_1)
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre

$$\vec{V}(M,S/R_n)=\vec{V}(M,S/R_0)+\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(M,R_{i-1}/R_i)$$

On peut écrire également

$$\vec{V}(M,S/R_n)=\vec{V}(M,S/R_0)+\vec{V}(M,R_0/R_n)$$

Par identification, on obtient $\boxed{\vec{V}(M,R_0/R_n)=\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(M,R_{i-1}/R_i)}$

Si ***les repères ont même origine*** *O*, on a alors la relation sur les rotations

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_0/R_n)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\Omega}(R_{i-1}/R_i)}$$

On en déduit la relation torsorielle

$$\boxed{V(R_0/R_n)=\sum_{i=1}^{n}V(R_{i-1}/R_i)}$$

6.4.2 – Composition des accélérations

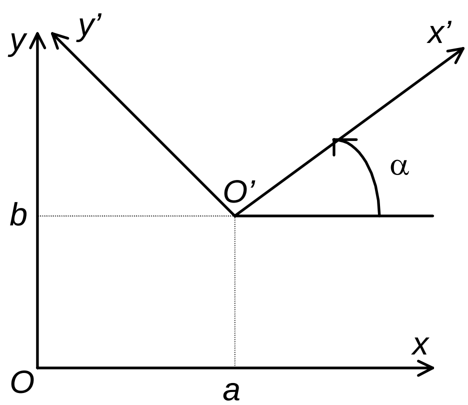
Pour mémoire, mais à n'utiliser qu'en cas d'extrême urgence ! ! ! Il est préférable de dériver des calculs sur les vitesses.

$$\boxed{\vec{a}(M/R)=\vec{a}(M/R')+\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R\wedge\vec{O'M}+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right)+2\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')}$$

6.5 – Mouvement plan sur plan

6.5.1 – Torseur cinématique

On dit qu'un solide *S*' est animé par rapport à un solide *S*, d'un mouvement plan sur plan, si quelquesoit l'instant considéré un plan *P*' attaché au solide *S*' est confondu géométriquement avec un plan P attaché au solide S.



Soit un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace, et soit un repère $R'(O',\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$ lié au solide (*S*).

On peut alors définir la position de *R*' dans *R* par

$$\vec{OO'}=a\vec{x}+b\vec{y}\qquad \alpha=(\vec{x},\vec{x}')$$

Les paramètres *a, b* et α correspondent aux trois degrés de liberté de la liaison plane.

Le torseur cinématique du mouvement de *S*' par rapport à *S*, s'écrit alors

$$\boxed{V(S'/S)=\begin{cases}\vec{\Omega}(S'/S)=\dot{\alpha}\vec{z}\\ \vec{V}(O',S'/S)=\dot{a}\vec{x}+\dot{b}\vec{y}\end{cases}_{O'}}$$

Réciproquement, si un torseur cinématique d'un mouvement de *S*' par rapport à *S* a cette forme, à tout instant *t*, le mouvement peut être considéré comme plan sur plan.

6.5.2 – Centre Instantané de Rotation (CIR)

L'axe central du glisseur est dans la direction $\vec{z}$. Il coupe les plans *P* et *P'* en un point *I*. Comme en tout point de cet axe central, on a

$$\vec{V}(I, S/S') = 0$$

Il existe donc, à tout instant, un point de *S'* dont la vitesse par rapport à *S* est nulle. C'est donc, qu'à tout instant, le mouvement de *S*' par rapport à *S* est une rotation de centre *I*.

Le point *I* est le CIR du mouvement de *S*' par rapport à *S*.

Les surfaces axoïdes sont des cylindres, non nécessairement de révolution, d'axe $\vec{z}$.

En appliquant la relation de changement de point, on peut écrire

$$\vec{V}(M, S'/S) = \vec{V}(I, S'/S) + \vec{\Omega}(S'/S) \wedge \vec{IM}$$

Mais $\vec{V}(I, S/S') = 0$ donc $\boxed{\vec{V}(M, S'/S) = \vec{\Omega}(S'/S) \wedge \vec{IM}}$

Pour tout point *M* de *S*', le vecteur vitesse $\vec{V}(M, S'/S)$ est perpendiculaire à $\vec{IM}$.

6.5.3 – Base et roulante d'un mouvement plan sur plan

Le point *I* CIR du mouvement de *S*' par rapport à *S* est mobile dans les plans *P* et *P*'. La trajectoire de *I* dans le plan *P* est appelée la *base* du mouvement de *S'* dans *S*. La trajectoire de *I* dans le plan *P*' est appelée la *roulante* du mouvement de *S*' par rapport à *S*.

Ces courbes sont les courbes intersection des surfaces axoïdes du mouvement avec les plans *P* et *P*'.

La base et la roulante d'un mouvement plan sur plan sont tangentes au CIR, et roulent sans glisser l'une sur l'autre.

En effet, on a : $\vec{V}(I, S'/S) = \vec{V}(I, S'/R_0) - \vec{V}(I, S/R_0) = 0$, donc

$$\vec{V}(I, S'/R_0) = \vec{V}(I, S/R_0)$$

Or, $\vec{V}(I, S'/R_0)$ est tangente à sa trajectoire dans *P*', c'est-à-dire la roulante et , $\vec{V}(I, S/R_0)$ est tangente à sa trajectoire dans *P*, c'est-à-dire la base. Donc, comme *I* est le point de contact de la base et de la roulante, ces courbes admettent la même tangente en ce point. Et comme $\vec{V}(I, S'/S) = 0$, ces courbes roulent sans glisser l'une sur l'autre.

6.5.4 – Théorème des trois plans glissants

On suppose que les plans P_3 attaché au solide 3, P_2 attaché au solide 2 et P_1 attaché au solide 1 sont constamment confondus géométriquement. En considérant les plans deux à deux, on note les CIR des mouvements plan sur plan correspondants : I_{12}, I_{23}, et I_{31}. On a toujours

$$\vec{V}(M, 3/1) = \vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1)$$ et en faisant intervenir les CIR,

$$\vec{\Omega}(3/1) \wedge \vec{I_{31}M} = \vec{\Omega}(3/2) \wedge \vec{I_{32}M} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{I_{21}M}$$

ou encore

$$\vec{\Omega}(3/1) \wedge \vec{I_{31}M} = \vec{\Omega}(3/2) \wedge \left(\vec{I_{32}I_{31}} + \vec{I_{31}M}\right) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \left(\vec{I_{21}I_{31}} + \vec{I_{31}M}\right)$$

soit enfin

$$\left(\vec{\Omega}(3/1)-\vec{\Omega}(3/2)-\vec{\Omega}(2/1)\right)\wedge \overrightarrow{I_{31}M} = \vec{\Omega}(3/2)\wedge \overrightarrow{I_{32}I_{31}} + \vec{\Omega}(2/1)\wedge \overrightarrow{I_{21}I_{31}}$$

le premier terme étant nul par composition des mouvements, en exprimant les vecteurs rotations, il vient :

$$\dot{\alpha}_{32}\vec{z}\wedge\overrightarrow{I_{32}I_{31}}+\dot{\alpha}_{21}\vec{z}\wedge\overrightarrow{I_{21}I_{31}}=0$$

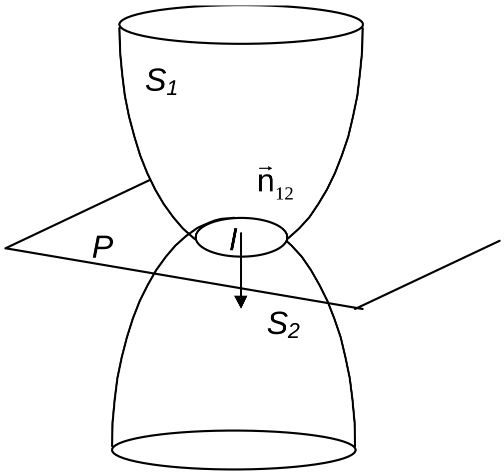
comme $\vec{z}$ est perpendiculaire à tout vecteur de du plan, la seule solution possible est :

$$\dot{\alpha}_{32}\overrightarrow{I_{32}I_{31}}+\dot{\alpha}_{21}\overrightarrow{I_{21}I_{31}}=0$$

Le point I_{31} est donc le barycentre des points I_{32} et I_{21}, affectés respectivement des coefficients $\dot{\alpha}_{32}$ et $\dot{\alpha}_{21}$. En particulier, *les trois points I_{31} ,I_{32} ,I_{21} sont alignés*.

6.6 – Contacts entre solides

6.6.1 – Contact ponctuel



Soient deux solides en contact en *I*. Le plan tangent commun aux deux solides en *I* est noté *P*. Le vecteur unitaire $\vec{n}_{12}$ est perpendiculaire à *P* en *I* et dirigé du solide 1 vers le solide 2.

On définit en *I* le torseur cinématique du mouvement de 2 par rapport à 1

$$V(2/1) = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(2/1)\\ \vec{V}(I,2/1)\end{matrix}\right._{I}$$

Si la vitesse de *I* attaché à 2 par rapport à 1 n'est plus dans le plan *P*, on a :

- perte de contact et le problème ne se pose plus,
- pénétration de 2 dans 1, qui n'est plus un solide indéformable.

S'il y a maintien du contact au cours du temps, $\vec{V}(I,2/1)$ appartient au plan *P*. Cette condition se traduit par

$$\vec{V}(I,2/1)\cdot\vec{n}_{12}=0$$

Le vecteur $\vec{V}(I,2/1)$ est appelé vitesse de glissement de 2 par rapport à 1 en *I*.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/1)$ peut être projeté sur $\vec{n}_{12}$ et sur le plan *P*. On écrit

$$\boxed{\vec{\Omega}(2/1)=\Omega_P(2/1)\vec{n}_{12}+\vec{\Omega}_R(2/1)}$$

$\Omega_P(2/1)$ caractérise le pivotement de 2 par rapport à 1 ;
$\vec{\Omega}_R(2/1)$ caractérise le roulement de 2 par rapport à 1.

6.6.2 – Autres types de contact

– *contact linéique* : Si la vitesse de glissement est nulle en tout point d'une droite de contact, cette droite est par définition, l'AIR du mouvement d'un solide par rapport à l'autre.

– *contact surfacique* : Dans le cas d'un contact surfacique, il n'est pas possible qu'il y ait roulement sans glissement en tout point de la surface. La vitesse de glissement dépend de la distance du point de contact considéré à l'AIRG du mouvement d'un solide par rapport à l'autre.

7 – Méthode générale d'étude des systèmes de solides

Détermination des groupes cinématiquement liés $\boxed{1}$

↓

Réalisation du graphe des liaisons $\boxed{2}$

↓

Tracé du schéma cinématique $\boxed{3}$

↓

Etablir les repères et paramétrer les groupes cinématiquement liés $\boxed{4}$

↓

Caractériser les liaisons $\boxed{5}$

↓

Déterminer les cycles $\boxed{6}$

↓

Écrire et résoudre les équations d'évolution $\boxed{7}$

remarques

étape $\boxed{4}$: On attribue à chaque solide un repère de référence. Ce repère doit tenir compte des points particuliers du solide. Les orientations des vecteurs unitaires doivent être déterminés avec soin.
On installe un paramétrage des longueurs et des angles qui doit rendre compte de manière biunivoque de la configuration du mécanisme.
Il est nécessaire d'établir à ce stade, des schémas de passage d'un repère à l'autre faisant apparaître les angles.

étape $\boxed{5}$: Établir pour chaque liaison le torseur cinématique associé, relativement au paramétrage effectué. Ce torseur doit être en un point où sa forme est la plus simple possible. Chaque liaison introduit n_c inconnues cinématiques indépendantes.

étape $\boxed{6}$: Elle permet d'écrire l'équation torsorielle

$$V(1/2)+V(2/3)+\ldots+V(3/k)+V(k/1)=0$$

qui donne au maximum 6 équations scalaires. Si b est le nombre de boucles cinématiques indépendantes du système, on a $6b$ équations scalaires pour un problème spatial et $3b$ équations scalaires pour un problème plan.

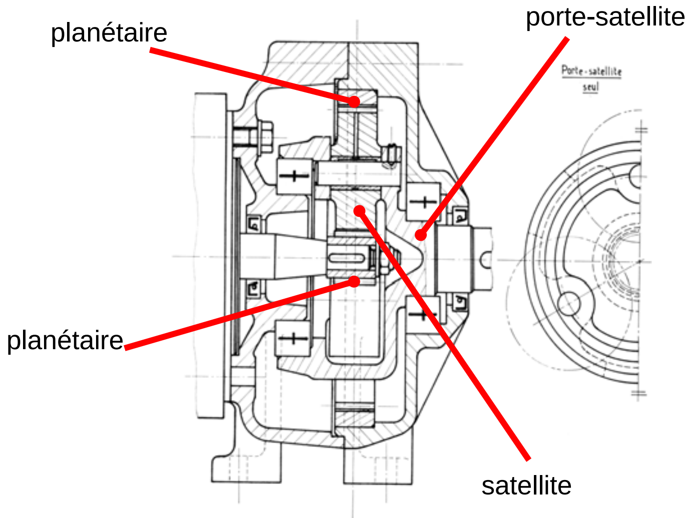
étape $\boxed{7}$: Pour le calcul effectif, il faut choisir les points les plus simples, en général les centres des liaisons et tenir compte des équations complémentaires.

Des produits scalaires convenables permettent souvent d'éliminer les inconnues indésirables et d'obtenir directement les équations cherchées.

8 – Mouvements épicycloïdaux

8.1 – Définitions

- *satellite* (s) : c'est un solide dont l'AIR est mobile par rapport au bâti ;
- *porte-satellite* (ps) : c'est le solide pour lequel l'AIR du satellite par rapport à lui est fixe ;
- planétaire (p) : c'est un solide qui roule sans glisser sur le satellite.



8.2 – Méthode générale de résolution

Il faut, en premier lieu, respecter la méthode générale précédente de paramétrage et de mise en équations.

On cherche ensuite le satellite, ce qui permet de déterminer le porte-satellite.

En se plaçant alors sur le porte-satellite, on peut traduire facilement les équations de non glissement, comme dans les systèmes à axes fixes. Il convient toutefois de bien faire attention aux orientations, surtout dans le cas des cônes.

Ces équations étant simplifiées, on revient au bâti par la relation :

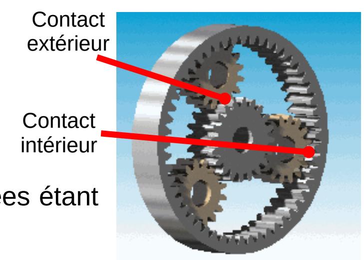
$$V(i/ps) = V(i/0) + V(0/ps)$$

Dans les mouvements épicycloïdaux, il manque bien souvent des relations. Elles sont fixées par les conditions extérieures de fonctionnement du mécanisme.

8.3 – Formule de Willis

Cette formule s'obtient en écrivant les conditions de roulement sans glissement aux contacts entre les roues dentées. Elle s'écrit

$$\boxed{\frac{\omega_{s/ps}}{\omega_{e/ps}} = \frac{\omega_{s/0} - \omega_{ps/0}}{\omega_{e/0} - \omega_{ps/0}} = (-1)^n \frac{\prod \text{caractéristiques menantes}}{\prod \text{caractéristiques menées}}}$$



n étant le nombre de contact extérieur et les caractéristiques des roues dentées étant le rayon, le diamètre ou le nombre de dents.

Le saviez-vous ? Les axes instantanés de rotation et de glissement ont été introduits par Michel CHASLES (1793 – 1880).