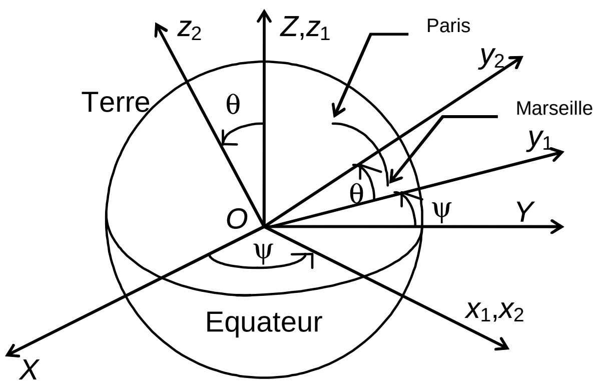
Cinématique du solide indéformable
– exercices –

Exercice n°1 Influence de la rotation de la Terre



On considère le repère R lié au centre O de la Terre supposé en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic (soleil + 3 étoiles « fixes »).
Un train se déplace de Marseille vers Paris à la vitesse uniforme $\vec{V}(T/R)$. Un wagon possède une masse m.

– Le repère R_1 lié à la Terre est en rotation uniforme par rapport au repère R d'axe axe $(O,\vec{z})$.

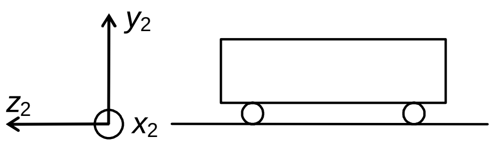
– Le repère R_2 lié au wagon est supposé en rotation uniforme par rapport à R_1.

1 – Etablir les figures planes caractérisant les rotations des bases :

$$B(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) \xrightarrow{(\Psi,\vec{z})} B_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$$
$$B_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1) \xrightarrow{(\theta,\vec{x}_1)} B_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$$

2 – Ecrire le vecteur position de M dans R.

3 – Calculer $\vec{V}(T/R)$.

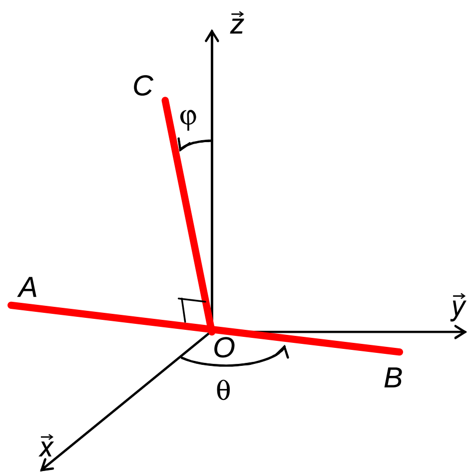


4 – Calculer $\vec{a}(T/R)$.

5 – Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique du point à T ($\sum \vec{F}(\overline{T} \to T) = m\vec{a}(T/R)$) en projection sur x_2. En déduire l'action radiale d'un wagon sur le rail.

6 – A.N. m = 20 tonnes, V = 120 kmh^{-1}, R = 6378 km. Latitude moyenne entre Marseille et Paris 46°.

Exercice n°2 Un ensemble de deux tiges



Un ensemble de deux tiges AB et OC orthogonales en O milieu de AB se déplace de telle façon que :

AB reste dans le plan fixe $(O;\vec{x},\vec{y})$, son mouvement étant défini par $\theta = (\vec{x},\overrightarrow{OB})$,
OC tourne autour de AB, son mouvement étant défini par $\varphi = (\vec{z},\overrightarrow{OC})$.

On donne $AB = 2a$ et $OC = b$.

1 – Définir les repères R_1 et R_2 liés respectivement à AB et OC.

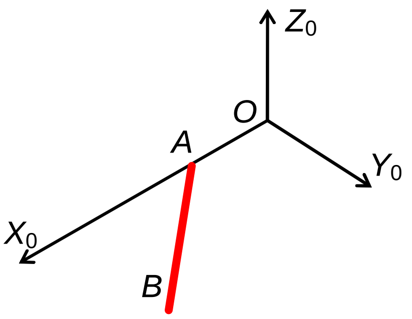
2 – Donner les expressions des vecteurs rotation $\vec{\alpha}(R_1/R)$, et $\vec{\alpha}(R_2/R)$,

3 – Donner les expressions des vecteurs vitesses des points A et B par rapport à R,

4 – Donner l'expression du vecteur vitesse du point C par rapport à R en utilisant :

4.1 – la loi de distribution des vecteurs vitesses,
4.2 – la loi de composition des vecteurs vitesses.

Exercice n°3 — Une tige baladeuse



Une tige rectiligne *AB* de longueur a est mobile par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le point *A* est astreint à rester sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ et le point *B* dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

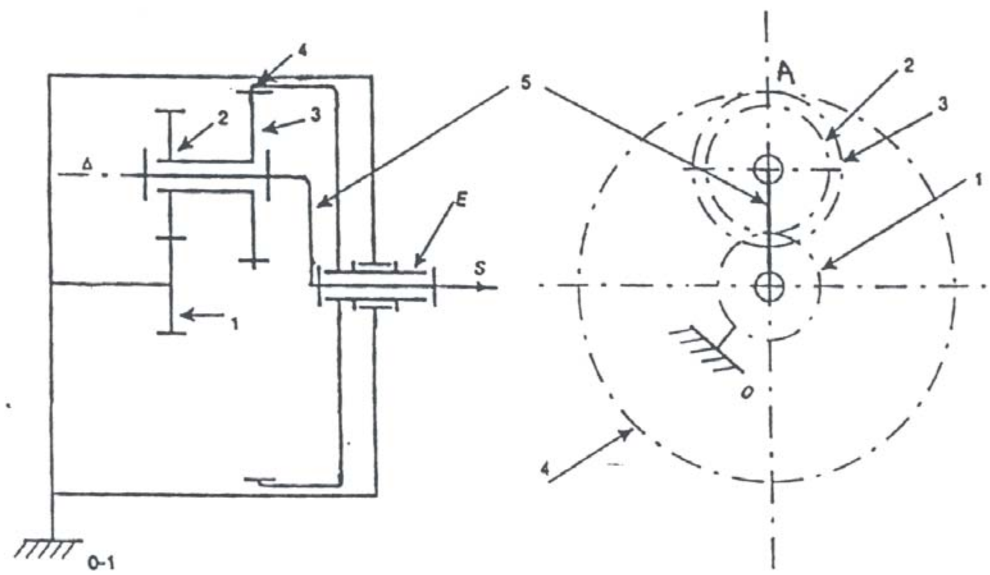
1 – Choisir un paramétrage permettant de mettre en position la barre *AB* par rapport à R_0.

2 – Déterminer alors le torseur cinématique du mouvement de *AB* par rapport à R_0.

3 – Exprimer $\vec{V}(B,AB/R_0)$ en projection sur R_0.

4 – Exprimer $\vec{a}(B,AB/R_0)$ en projection sur R_0.

Exercice n°4 — Train épicycloïdal double



Dans le train épicycloïdal représenté ci–dessus, le satellite {(2),(3)} roule sans glisser à l'intérieur de la couronne (4) liée à l'arbre d'entrée (E) et sur la route d'entrée (1) fixe. Le porte satellite (5) est lié à l'arbre de sortie (S).

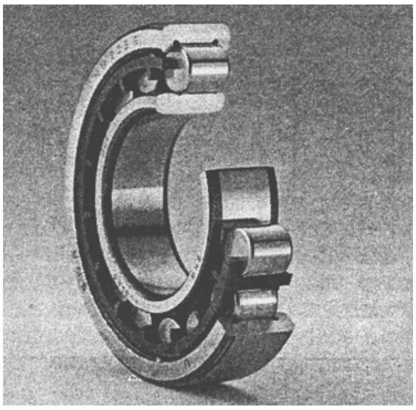
1 – Donner la position du centre instantané de rotation de {(2),(3)} par rapport à (0) dans un plan ( ).

2 – En déduire la vitesse d'un point de l'axe de {(2),(3)} par rapport à (0), en fonction de $_{40}$, R_1, R_4 et R_5.

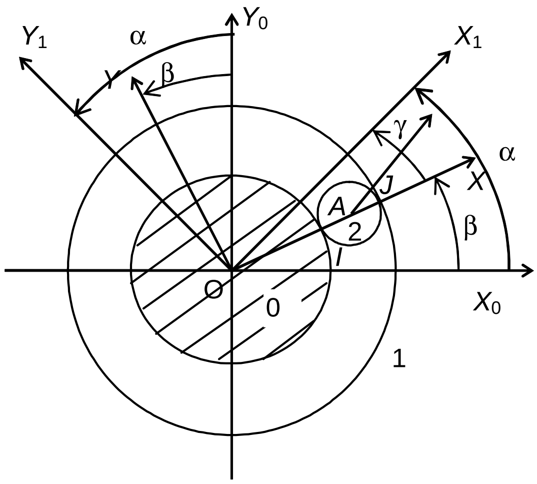
3 – Donner l'expression de $\dfrac{\omega_{50}}{\omega_{40}} = \dfrac{\omega_s}{\omega_e}$ en fonction de R_1, R_4 et R_5.

4 – Donner les expressions des torseurs cinématiques en A du mouvement de (4) et de {(2),(3)} par rapport à (0) (en fonction de $_{40}$, R_1, R_4 et R_5).

Exercice n°5 Roulement à rouleaux cylindriques



Le roulement à rouleaux cylindriques de gauche est schématisé et paramétré ci–dessous.
Au bâti 0 est associé le repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$. Un arbre cylindrique d'axe $\left(O,\vec{z}_0\right)$ et de rayon r_0, est lié au bâti.
Le solide 1 est lié au bâti par une liaison pivot d'axe $\left(O,\vec{z}_0\right)$. Elle présente un alésage cylindrique d'axe $\left(O,\vec{z}_0\right)$. On lui attache le repère $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0\right)$ et on pose : $\alpha=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_1\right)$.
Le rouleau 2 est un cylindre d'axe $\left(A,\vec{z}_0\right)$ et de rayon r_2. On lui attache le repère $R_2\left(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0\right)$.



Le repère $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0\right)$ est tel que : $\vec{OA}=\left(r_0+r_2\right)\vec{x}$. On pose alors : $\beta=\left(\vec{x}_0,\vec{x}\right)$ et $\gamma=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_2\right)$. Le rouleau 2 est en contact en I avec l'arbre 0 et en J avec l'alésage de 1. On suppose qu'en ces deux points il y a roulement sans glissement.

Le problème est supposé plan.

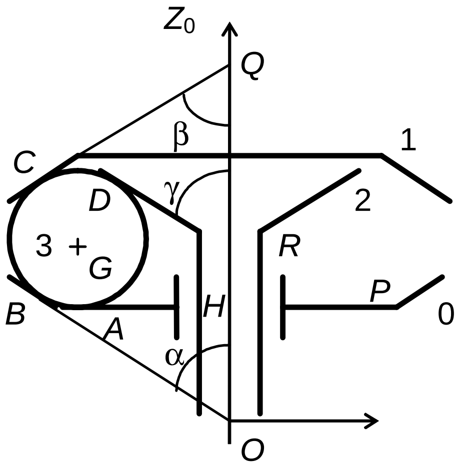
1 – Préciser les torseurs cinématiques de chaque liaison

2 – Préciser la relation entre $\dot{\gamma}$ et $\dot{\beta}$.

3 – Préciser la relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

Exercice n°6 Réducteur de vitesse à billes

Le bâti 0 du réducteur comporte un tronc de cône de révolution de sommet O et de demi angle , limité par un plan P. Le repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$, lié à ce bâti, est tel que $\left(O,\vec{z}_0\right)$ soit l'axe de révolution du cône. Le plan P est perpendiculaire à $\left(O,\vec{z}_0\right)$ qu'il coupe en H. On pose : $\vec{OH}=h\vec{z}_0$.
Le solide 1 est lié au bâti 0 par une liaison pivot glissant d'axe $\left(O,\vec{z}_0\right)$. Il comporte une surface conique de sommet Q et de demi angle au sommet . Le repère $R_1\left(Q,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0\right)$ est lié au solide 1. On pose : $\Psi=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_1\right)$.



Le solide 2 est lié au bâti 0 par une liaison pivot glissant d'axe $\left(O,\vec{z}_0\right)$. Il comporte une surface conique de sommet R et de demi angle au sommet . Le repère $R_2\left(R,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0\right)$ est lié au solide 2. On pose : $\theta=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_2\right)$.

Une bille 3 de centre G et de rayon r, est en contact avec le plan P en A et avec le cône du bâti au point B. De plus elle est en contact en C avec le cône du solide 1 et en D avec le cône du solide 2.

Un dispositif à ressort maintient le contact au point cité. On suppose que le glissement est nul en *A*, *B*, *C*, et *D*.

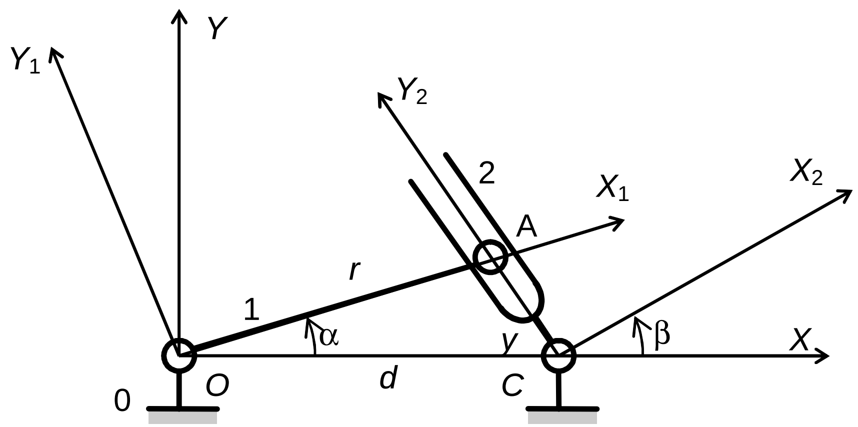
1 – Caractériser le torseur cinématique de chaque liaison.

2 – Préciser le torseur cinématique du mouvement de la bille 3 par rapport à 0.

3 – Préciser la relation entre $\dot{\Psi}$ et $\dot{\theta}$.

4 – Faire l'application numérique pour $\alpha = \beta = \gamma = 45°, r = 20, h = 30$.

Exercice n°7 Mécanisme à croix de Malte



Le mécanisme ci–dessus transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre 1 en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre 2.

L'arbre 2 est constitué de 3 branches telles que *CA*, à 120° l'une de l'autre. Lorsque le doigt *A* de l'arbre 1 quitte la rainure de 2, l'angle *OAC* est égal à 90° et l'angle *ACO* est égal à 60°, de façon qu'au tour suivant le doigt *A* puisse entrer dans la rainure suivante de 2.

Le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié au bâti 0. L'arbre 1 est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti 0.

Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ est lié à 1 tel que $\vec{OA} = r\vec{x}_1$ ($r > 0$). On pose : $\alpha = (\vec{x},\vec{x}_1)$

L'arbre 2 est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ avec le bâti 0 tel que $\vec{OC} = d\vec{x}$ ($d > 0$).

Le repère $R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z})$ est lié à 2 tel que $\vec{CA} = y\vec{y}_2$ (y variable > 0). On pose : $\beta = (\vec{x},\vec{x}_2)$.

Pour l'étude, la liaison entre les arbres 1 et 2 est schématisée dans l'espace par une linéaire annulaire de centre *A* et de direction $\vec{y}_2$, et dans le plan par une ponctuelle au point *A* de normale $\vec{x}_2$. Les paramètres y et sont fonction de .

1 – Dans la configuration de la figure, on donne la vitesse $\vec{V}(A,1/0)$. Déterminer graphiquement les vecteurs vitesses $\vec{V}(A,1/2)$ et $\vec{V}(A,2/0)$.

2 – Déterminer en fonction des paramètres de position et de leurs dérivées, le vecteur vitesse $\vec{V}(A,1/2)$.

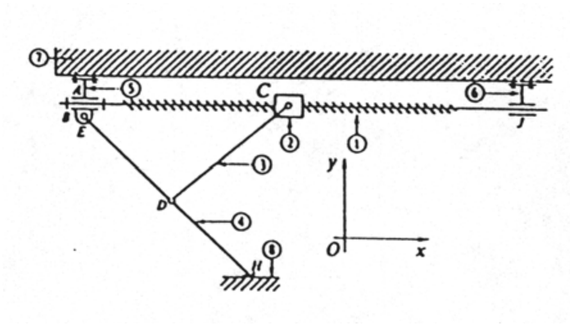
3 – Ecrire au point *A* le torseur cinématique du mouvement de 1 par rapport à 2.

4 – Déterminer le CIR I_{12} du mouvement de 1 par rapport à 2.

Exercice n°8 — Vérin de niveau de caravane

La figure ci–contre représente un vérin de niveau pour caravane constitué par :

- une vis (1), de pas *p*, tournant à la vitesse angulaire constante par rapport aux paliers *A* et *J* liés à la caravane (7),
- un écrou (2),
- une barre (3),
- une barre (4) à laquelle est soudée un patin de contact avec le sol (point de contact *H*).



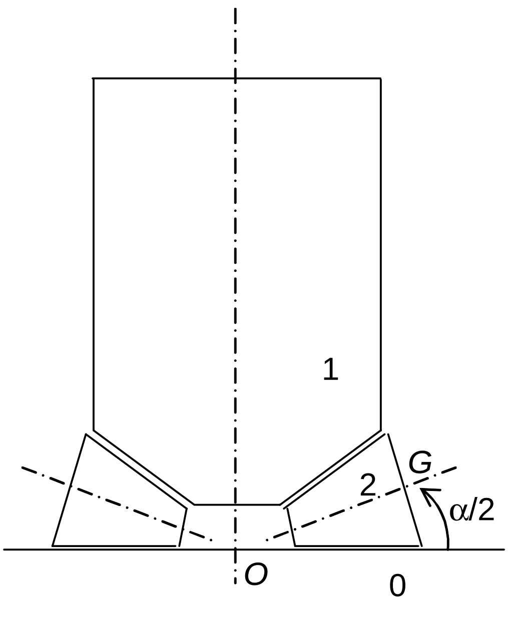
En manœuvrant la vis (1), on communique à (2) un mouvement de translation par rapport à (7), ce qui a pour effet de faire varier la hauteur de (7) par rapport au sol (8).

Déterminer, dans **le mouvement par rapport à la caravane** :

1 – La vitesse du point *C*.
2 – Le centre instantané de rotation de (3), et la vitesse du point *D*.
3 – La vitesse du point *H*.

Exercice n°9 — Butée à rouleaux coniques

Les rouleaux (2) roulent sans glisser sur le bâti (0) et sur l'arbre (1). On notera l'angle au sommet des rouleaux.



1 – Montrer que la génératrice de contact de (2) et (1) doit passer par *O*,

2 – Connaissant $\vec{\omega}_{10} = \omega_{10}\vec{z}_0$, en déduire graphiquement $\vec{\alpha}_{20}$ et $\vec{\alpha}_{21}$,

3 – Donner l'expression de la vitesse de *G* par rapport au bâti (On notera *h* la distance de *G* à l'axe de (1)).

4 – Le mouvement de (2) est la composée de deux rotations, une rotation autour de l'axe de (1) dont la vitesse angulaire sera notée $\dot{\theta}$ et une rotation autour de l'axe de (2) dont la vitesse angulaire sera notée $\dot{\varphi}$,

4.1 – Décomposer $\vec{\alpha}_{20}$,

4.2 – En déduire $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ en fonction de $_{10}$,

4.3 – retrouver la vitesse de *G* par rapport à 0 en utilisant $\dot{\theta}$; vérifier la concordance avec l'expression trouvée en 3 –.

5 – Application numérique : = 45°.

Exercice n°10 — Différentiel

Le différentiel est un exemple particulier d'engrenages à axes perpendiculaires. Il permet, par exemple, aux roues d'un véhicule automobile d'avoir des vitesses de rotation différentes pour une même vitesse de sortie du moteur.

L'arbre moteur impose à la couronne (4) une vitesse de rotation $\vec{z}_0$. La couronne (4) entraîne les satellites (2) et (2') à la même vitesse angulaire . (2) et (2') peuvent de plus, tourner autour de leur axe . Soient $_1$ et $_3$ les vitesses de rotation des roues (1) et (3) autour de $(O,\vec{z}_0)$.

Les satellites et les pignons liés aux roues ont même rayon *a*.

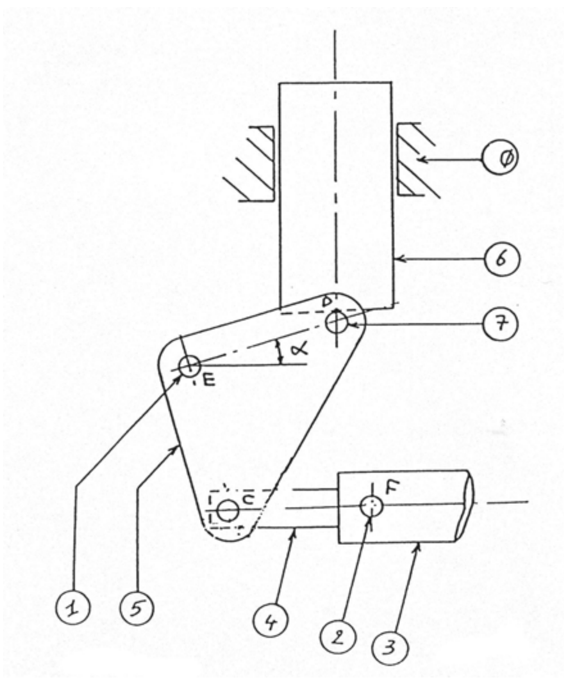
Montrer que $_1 + \; _3 = 2$.

Exercice n°11 Manipulateur de fraiseuse

La figure ci–dessous (échelle 1:2) représente une partie d'un manipulateur utilisé sur une fraiseuse pour l'alimentation en pièces à usiner et l'évacuation des pièces finies.

Les axes (1) et (2) sont fixes. Le corps du vérin (3) tourne autour de (2). La vitesse relative de déplacement de la tige du vérin (4) par rapport à (3) est donnée : $\|\vec{v}(C,4/3)\| = 0{,}05\ \mathrm{ms}^{-1}$.

D'autre part, (4) est articulée en C au levier de renvoi (5) qui tourne autour de l'axe (1). Le coulisseau (6) repose sur l'axe (7) solidaire de (5) et coulisse dans la glissière fixe (0) suivant l'axe $(D, \vec{y})$.



Dans la position représentée sur la figure (angle),

1 –
1.1 – Déterminer graphiquement $\vec{v}(C/0)$ et $\vec{v}(C,3/0)$.
1.2 – En déduire la vitesse angulaire de rotation de (3) autour de (2).

2 – Exprimer :
2.1 – Le vecteur rotation $\vec{\alpha}(5/0)$.
2.2 – Le vecteur vitesse absolue du point *D*.

3 – Déterminer :
3.1 – Le vecteur de glissement de (6) par rapport à (7) en *D* : $\vec{v}(D,6/7)$ et le vecteur rotation $\vec{\alpha}(6/7)$. Préciser s'il s'agit de roulement et/ou de pivotement.
3.2 – Le vecteur vitesse de translation de (6) par rapport à (0).

4 – Donner les expressions des torseurs cinématiques :
4.1 – de (5) par rapport à (0) en C.
4.2 – de (6) par rapport à (5) en D.

Exercice n°12 Variateur ARTER

Remarque préliminaire : les caractéristiques géométriques seront relevées sur le dessin d'ensemble.

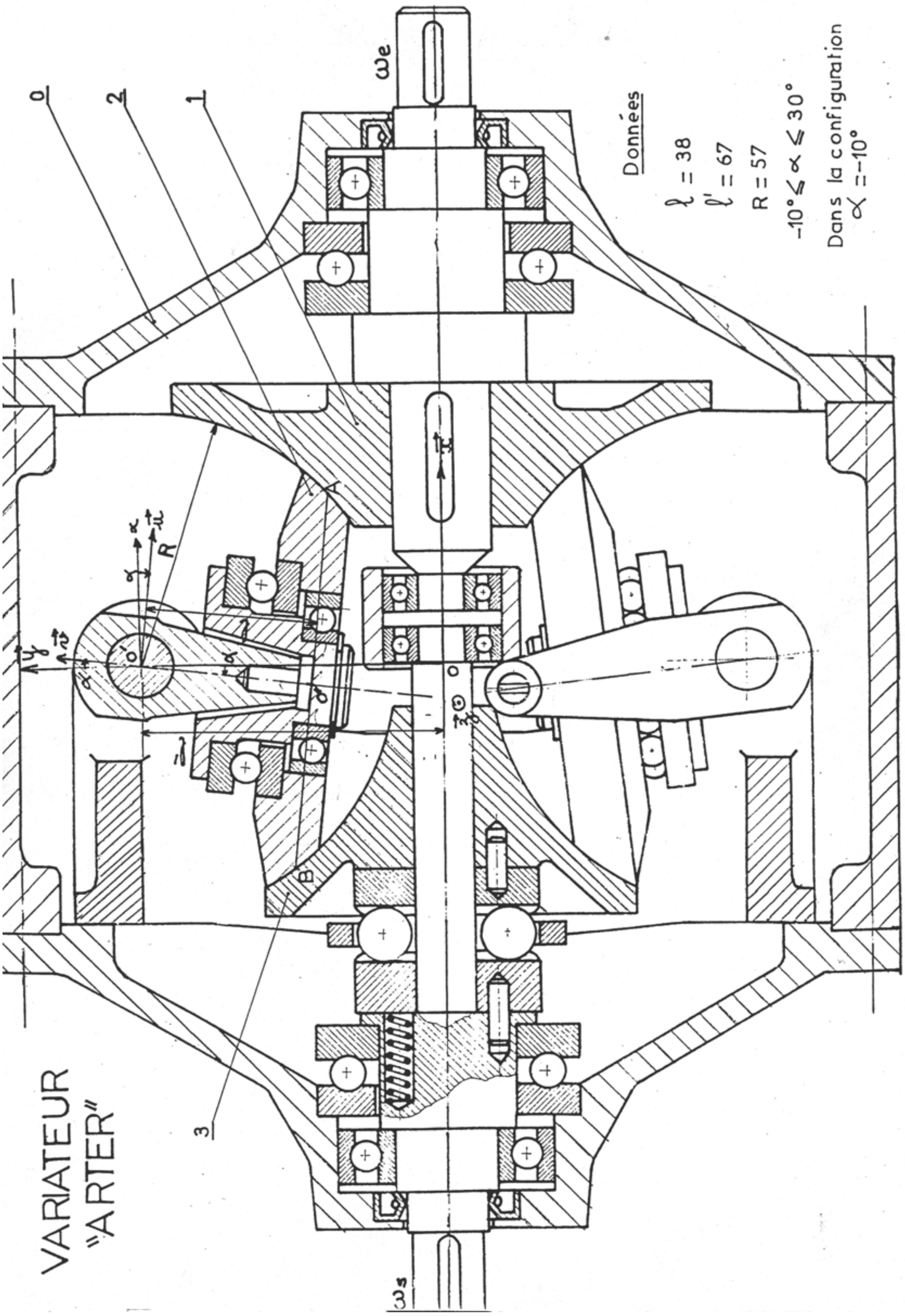
1 – Dans une configuration où est positif, établir un schéma cinématique du réducteur, en précisant directions principales, points de référence et paramètres de position du mécanisme,

Hypothèse : Aux points de contact *A* entre 1 et 2, et *B* entre 2 et 3, il y a roulement sans glissement. Les positions de *A* et *B* étant définies par *l'*, *l*, *R* et ,

2 – Ecrire les relations qui traduisent les particularités cinématiques,

3 – En déduire le rapport $i = \frac{\omega_s}{\omega_e}$ en fonction du paramètre et des caractéristiques géométriques. En observant le dessin, préciser le signe de *i*. Pour quelle valeur de , $|i| = 1$? Vérifier ces résultats à partir de la relation.

4 – Tracer la courbe $i = f(\alpha)$ point par point. On utilisera les valeurs suivantes de en degrés : –10, 0, 10, 20, 30. Commenter les résultats (intérêt du variateur).



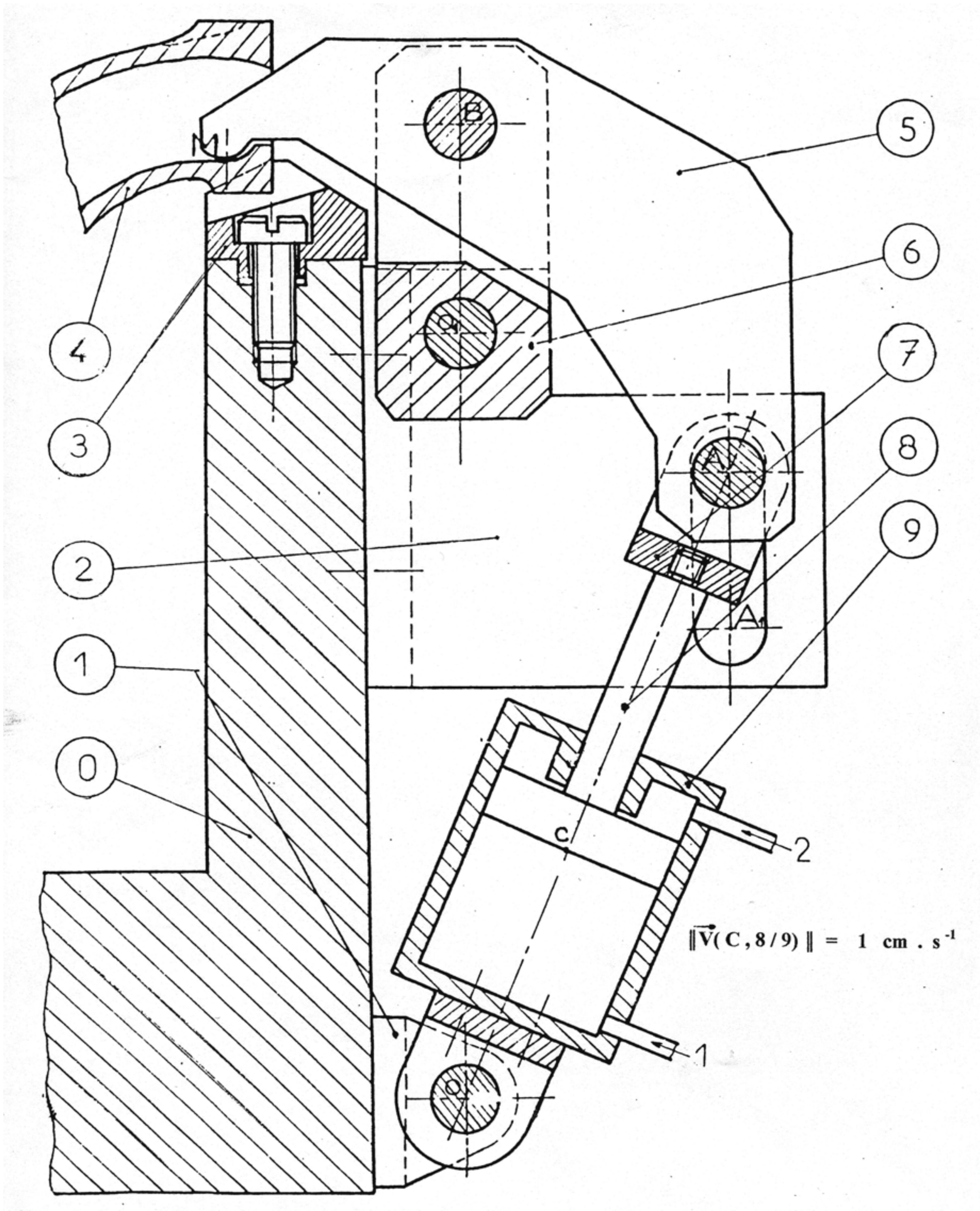
5 – Etude de la sensibilité du réglage :

5.1 – Déterminer la fonction $\Delta i = f(\Delta\alpha)$,

5.2 – Sur la courbe déterminer la valeur pour laquelle la précision de réglage est la plus faible. Calculer $\dfrac{\Delta i}{\Delta\alpha}$ pour cette valeur.

Exercice n°13 Bride à évolution et serrage rapides

Déterminer graphiquement la vitesse du point *M* de la bride 5 par rapport au bâti 0 en fin de course du cycle de serrage.



Exercice n°14 Pantographe de TGV

Le captage du courant pour les moteurs électriques des TGV est réalisé par des pantographes à double étage. L'étage inférieur intervient pour les variations lentes de hauteur de grande amplitude alors que l'étage supérieur qui comporte l'archet de contact avec la caténaire, ne se déplace que pour les variations de faible amplitude afin d'assurer le contact permanent avec la caténaire. Le dessin (figure 1, page suivante) montre ce pantographe en position déployée ainsi qu'en position repliée.

Le mouvement de montée du pantographe est obtenu en alimentant le vérin pneumatique (P = 0,8 MPa). Un galet sphérique 2 est en liaison pivot d'axe ($A,\vec{z}$) avec l'extrémité de la tige du vérin 1. Ce galet 2 roule sans glisser dans la rainure d'axe ($A,\vec{w}$) réalisée dans le levier coudé 3, lui même en liaison pivot d'axe ($O,\vec{z}$) avec le bâti 0. Une butée réglable placée sur 3 permet de régler la position basse du pantographe. La bielle isolante *MN* 4 est en liaison pivot d'axe ($M,\vec{z}$) avec 3 et d'axe ($N,\vec{z}$) avec le levier de renvoi 5 (en liaison pivot d'axe ($P,\vec{z}$) avec le bâti).

La tringle à boutonnière 6 est en liaison pivot d'axe ($Q,\vec{z}$) avec le levier 5 et possède une rainure (boutonnière) dans laquelle est guidé un galet 7. Celui–ci est en liaison pivot d'axe ($T,\vec{z}$) avec le bras de poussée 8. La liaison pivot d'axe ($D,\vec{z}$) entre le bâti 0 et le bras 8 permet la rotation de celui–ci dans le sens horaire sous l'action des deux ressorts de traction 10 (ressorts de montée). En *C* : liaison pivot d'axe ($C,\vec{z}$) entre 8 et 9. On se place dans la situation de levée de l'étage inférieur du pantographe.

Les ressorts de montée 10 agissent sur l'ensemble du mécanisme pour provoquer la montée du bras 8 qui ne peut s'effectuer que si le vérin est alimenté car les 3 ressorts de rappel du vérin oblige la tige 1 à rester en position rentrée. La mise sous pression du vérin libère l'action des ressorts 10 et le bras 8 commence à pivoter. La tige 1 du vérin ne fait qu'accompagner le mouvement. D'où le contact en *B* entre 2 et 3 et en *S* entre 6 et 7 (*contact sans glissement*).

A partir du schéma cinématique, déterminer graphiquement $\vec{v}(C,8/0)$.

On connaît $\vec{v}(A,1/0)$: translation suivant l'axe de la tige du vérin dans le sens sortie de vérin et de valeur 60 mm s^{-1}.

Echelles : schéma : 0,2 mm pour 1 mm
vitesses : 1,5 mm pour 1 mm s^{-1}.

Remarque : il est conseillé de prendre une échelle de vitesse plus grande (7,5 mm pour 1 mm.s^{-1}) lors de l'étude cinématique du solide 6.

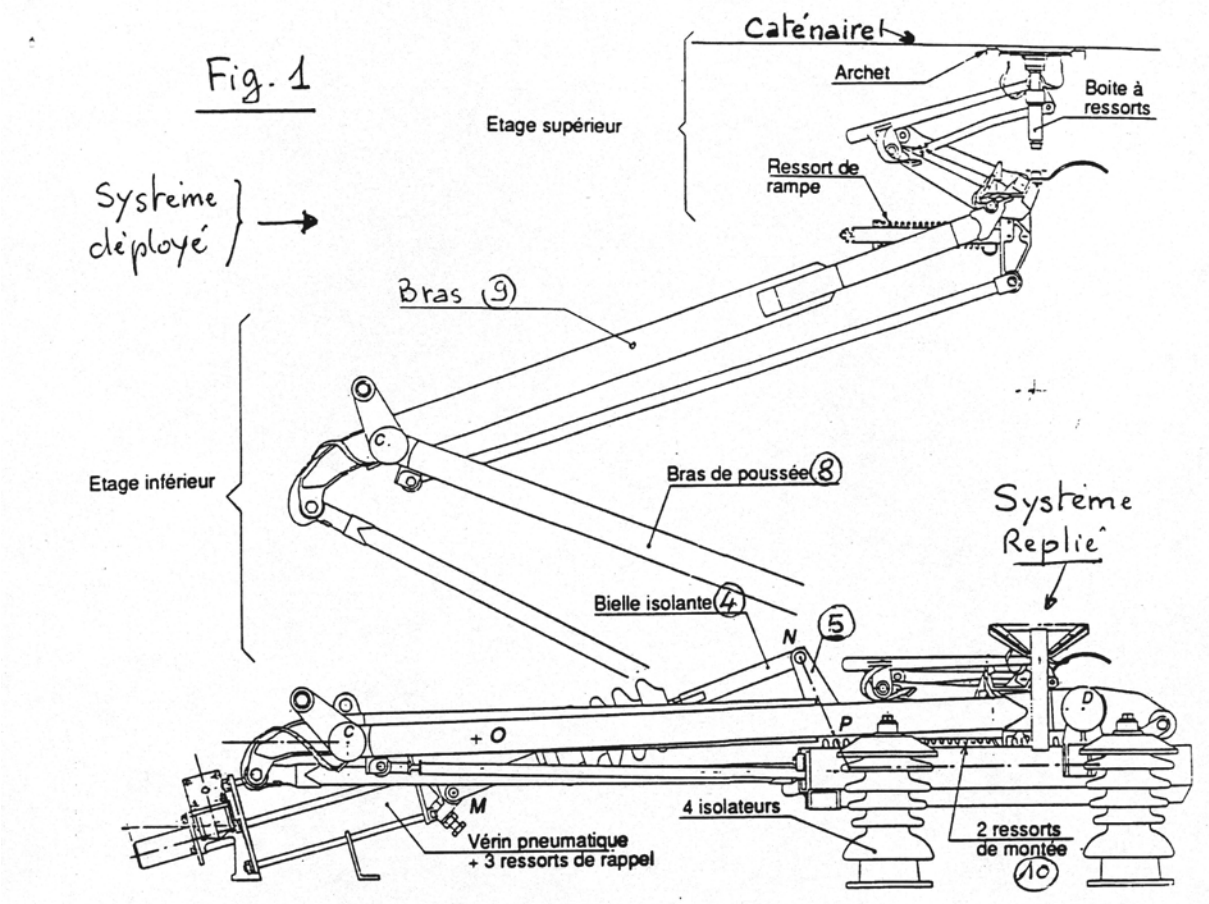


Fig. 1
Caténaire
Archet
Boite à ressorts
Etage supérieur
Ressort de rampe
Système déployé
Bras 9
Etage inférieur
C.
Bras de poussée 8
Système Replié
Bielle isolante 4
N
5
C
+ O
P
D
M
4 isolateurs
Vérin pneumatique
+ 3 ressorts de rappel
2 ressorts de montée
10

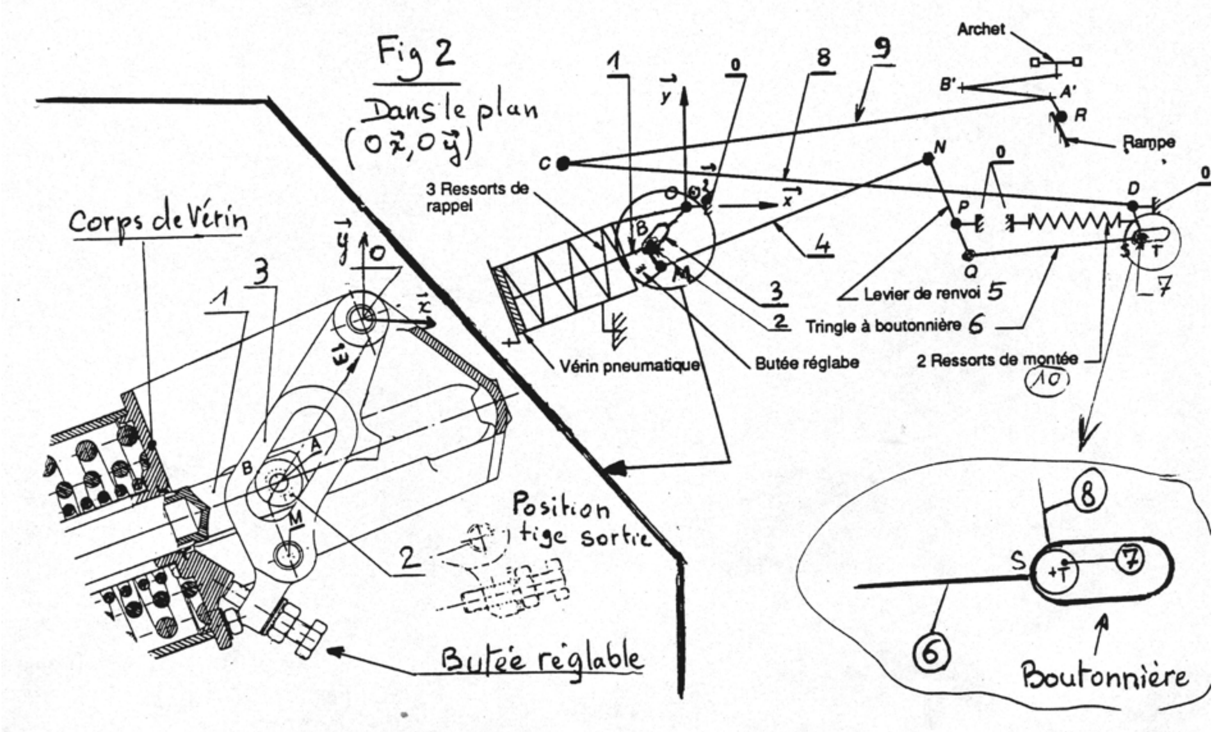


Fig 2
Dans le plan
(O x, O y)
Corps de Vérin
3
1
y
O
x
B
A
M
2
Position tige sortie
Butée réglable
Archet
B'
A'
R
Rampe
1
0
8
9
C
N
0
D
0
3 Ressorts de rappel
O
x
B
M
4
P
Q
T
S
7
3
2
Levier de renvoi 5
Tringle à boutonnière 6
Vérin pneumatique
Butée réglabe
2 Ressorts de montée
10
8
S
T
7
6
Boutonnière

Exercice n°15 — Un point sur une droite

Sur une droite orientée, on choisit une origine O et un vecteur unitaire $\vec{x}$. Le point M est situé sur cette droite et on pose

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x}\ ,$$

Le mouvement du point M, initialement immobile en O, est caractérisé par trois phases :

accélération constante pendant le temps t_1,
mouvement à vitesse constante pendant le temps t_2,
décélération constante de même module que dans la première phase jusqu'à l'arrêt t_f.

Déterminer la vitesse et la position de M en fonction de t. Tracer les courbes $a(t), v(t), x(t)$ pour $t \in [0, t_f]$.

Exercice n°16 — Cinématique du point

On considère un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$. L'angle de vecteur $(\vec{x},\vec{x}_1)$ est noté .
Un point M se déplace de façon que :

$$\vec{v}(M/R) = a\vec{y}_1$$

Les quantités et a sont des fonctions du temps.

1 – Déterminer $\vec{a}(M/R)$,
2 – Peut–on déterminer complètement $\vec{a}(M/R_1)$?

Exercice n°17 — Satellite de la Terre

L'espace étant rapporté à un repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, on considère une sphère S_0 de rayon r et de centre O. Un point sur cette sphère est repéré par sa longitude et sa latitude avec

$$-\pi < \alpha \le \pi \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}\ ,$$

On considère également un vecteur unitaire $\vec{z}_1$ et on pose

$$\theta = (\vec{z}_0,\vec{z}_1) \qquad \text{est constant et } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

on définit alors un plan P passant par O, contenant l'axe $(O,\vec{x}_0)$ et de vecteur normal $\vec{z}_1$. Un satellite S_1, considéré comme un point M, décrit dans le plan P un cercle de rayon R et on pose :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{x}_1 \qquad \varphi = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$$

Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ peut alors être constitué. On appelle m la projection de M sur la sphère S_0.

1 – Tracer les schémas correspondants aux différents repères.
2 – Exprimer le torseur cinématique du mouvement de R_1 par rapport à R. En déduire $\vec{v}(M,R_1/R)$ et $\vec{a}(M,R_1/R)$.
3 – Déterminer la longitude et la latitude de m.

Exercice n°18 — Cinématique d'un point dans le plan

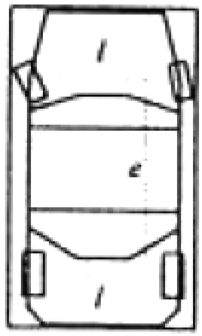
Dans un plan repéré par $R(O,\vec{x},\vec{y})$, *a* et *b* étant deux longueurs données, le point *M* dépend d'un paramètre *t* tel que :

$$\overrightarrow{OM} = a(\sin 2t + \cos 2t)\vec{x} + b(\sin 2t - \cos 2t)\vec{y}$$

1 – Déterminer la trajectoire de *M* dans *R*.
2 – Déterminer le vecteur vitesse de *M* dans *R* relativement à *t*.
3 – Déterminer le vecteur accélération de *M* dans R relativement à *t*.

Exercice n°19 — Voiture dans un virage

Un véhicule à 4 roues roule en tournant à plat, les vitesses des points situés à la verticale des point s de contact des roues avec le sol étant tangentes aux plans de ces roues. On appelle *R* le rayon de courbure de la trajectoire de la roue arrière gauche, *e* l'empattement et *L* la largeur du véhicule au niveau des moyeux des roues.



1 – Déterminer graphiquement la position du centre instantané de rotation du mouvement.
2 – Déterminer l'angle entre les directions d'alignement des roues directrices en fonction de *e*, *R* et *L*
3 – Déterminer les vitesses des différents centres des roues en fonction de la vitesse angulaire de
rotation du véhicule

Exercice n°20 — Somme de deux torseurs

L'exercice se traite dans le repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Soient les deux torseurs :

$$T_1 = \underset{A}{\begin{cases} -\vec{x} - 2\vec{y} - 3\vec{z} \\ \vec{x} + \vec{z} \end{cases}},\ A(1,1,1) \quad \text{et} \quad T_2 = \underset{B}{\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z} \\ \vec{x} + \vec{z} \end{cases}},\ B(0,1,2).$$

Calculer la somme de ces deux torseurs.

Exercice n°21 — Glisseur

On considère les repères $R(O;\ \vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $R'(O';\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ tels que

$$\vec{OO'} = 4\vec{x} \quad \text{et} \quad (\vec{x},\vec{u}) = (\vec{y},\vec{v}) = \theta$$

Dans *R*', on définit la position d'un point *A* par ses coordonnées $(1,0,3)$.
Dans *R*, on définit le vecteur $\vec{V}(0,2,4)$.

1 – Représenter tous ces éléments sur une figure spatiale. Faire ensuite une représentation plane de la rotation.

2 – Calculer $\vec{M}_O(G)$ si *G* est le glisseur $G(A,\vec{V})$.
3 – Calculer la projection de $\vec{M}_O(G)$ sur $\vec{u}$ puis sur $\vec{v}$.
4 – Ecrire le torseur représentatif du torseur en *O* dans *R*. Donner son axe central.

Exercice n°22 Trois glisseurs

On considère les trois vecteurs suivants dont les composantes dans le repère orthonormé direct $R(O\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont

$$\vec{V}_1(0,0,1),\vec{V}_2(-1,2,0),\vec{V}_3(\alpha,\beta,\gamma)$$

ainsi que les trois points de coordonnées :

$$A_1(0,0,1),A_2(0,1,0),A_3(1,-3,-1)$$

Déterminer les nombres réels , , pour que le système des trois glisseurs $\left[A_1,\vec{V}_1\right]$, $\left[A_2,\vec{V}_2\right]$, $\left[A_3,\vec{V}_3\right]$ soit équivalent à un couple dont on calculera le moment.

Exercice n°23 Comoment

On considère les torseurs $T_1 = {}_N\begin{cases}\vec{R}_1\\ \vec{M}_1\end{cases}$ et $T_2 = {}_N\begin{cases}\vec{R}_2\\ \vec{M}_2\end{cases}$ réduits au point *N*. On appelle comoment ou produit de T_1 par T_2, le nombre réel

$$T_1 \otimes T_2 = \vec{R}_1.\vec{M}_2 + \vec{R}_2.\vec{M}_1$$

1 – Montrer que $T_1 \otimes T_2$ est indépendant de *N*.

2 – Montrer que si le comoment $T_1 \otimes T_2$ est nul, les axes centraux de T_1 et T_2 se coupent (à angle droit).

Exercice n°24 Moment

Aux extrémités *A* et *B* d'une tige de longueur *L*, pouvant glisser suivant $(O,\vec{x})$ dans son support, sont exercées deux actions mécaniques représentées par les glisseurs $\left(A,\vec{F}_A\right)$ et $\left(B,\vec{F}_B\right)$ tels que dans le repère orthonormé direct $R(O\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on ait $\vec{F}_A = -F_A\vec{y}$ et $\vec{F}_B = -F_B\vec{y}$. On pose $\overrightarrow{OB} = x\vec{x}$.

1 – Déterminer la résultante $\vec{R}$ et le moment $\vec{M}(O)$ de la somme des deux glisseurs.
2 – Pour quelle valeur de x ce moment est–il nul ?

Exercice n°25 Dérivation vectorielle

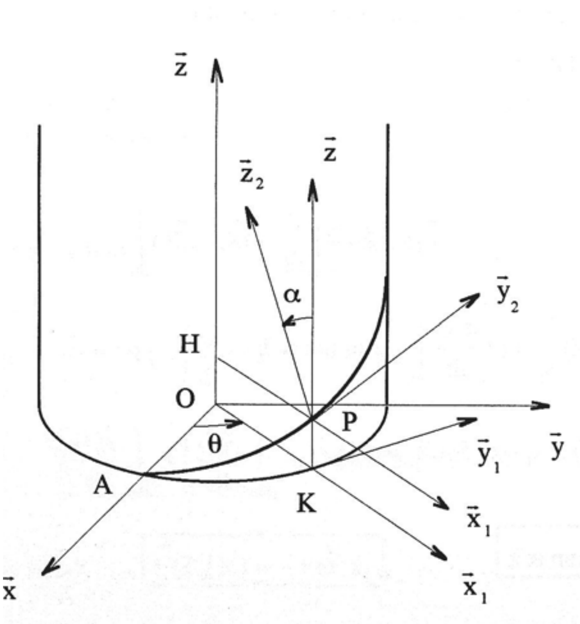
Soit un repère $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et un repère $R'\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$, tous les deux orthonormés directs. Le repère *R'* est obtenu à partir du repère *R* par deux rotations $R_1\left(O\vec{k},\alpha\right)$ et $R_2\left(O\vec{x},\beta\right)$. Déterminer $\left[\dfrac{d\vec{y}}{dt}\right]_R$.

Exercice n°26 Dérivation vectorielle

Soit les repères $R_0\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$, $R_1\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{z}\right)$ et $R_2\left(O,\vec{u},\vec{j},\vec{w}\right)$ tels que l'on passe de R_0 à R_1 par une rotation d'angle et d'axe $\vec{z}$, et de R_1 à R_2 par une rotation d'angle et d'axe $\vec{j}$.

Soit le réel *t*. On considère la fonction vectorielle $\vec{V} : t \rightarrow r(t)\vec{w}(t)$, dans laquelle *r*(*t*) est une fonction numérique. Calculer $\left[\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}\right]_{R_0}$.

Exercice n°27 — Dérivation vectorielle



Un point *P* décrit dans un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ une hélice à droite d'angle   sur un cylindre de révolution d'axe *(O,* $\vec{z}$ *)* et de rayon *r*.

Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ le repère tel que le plan $(O,\vec{x}_1,\vec{z})$ contienne le point *P*. On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x}_1)$ avec   =   *.t* . Soit R_2 $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ le repère tel que l'axe *(P,* $\vec{y}_2$ *)* soit tangent à l'hélice. On a $= (\vec{y}_1,\vec{y}_2) = (\vec{z},\vec{z}_2)$.

L'axe (*P,* $\vec{x}_1$) rencontre l'axe *(O,* $\vec{z}$ *)* en un point *H* et l'on note *K* la projection orthogonale du point *P* sur le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$. Dans ces conditions, $\vec{KP} = r\theta\tan\alpha\vec{z}$, *p = r tan*   est le pas réduit.

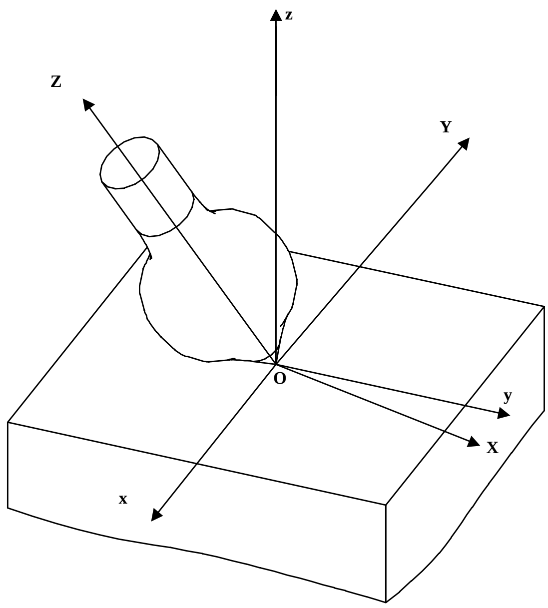
1 – Déterminer $\left[\dfrac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R$.

2 – Déterminer $\left[\dfrac{d^2\vec{OP}}{dt^2}\right]_R$.

Exercice n°28 — Torseur

L'exercice se traite dans le repère orthonormé $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
Déterminer le torseur *T* défini par son axe central *D* (*2x–y=0, 4x–y+2z–1=0*) et tel que ses moments par rapport aux axes (*O,x*) et (*O,y*) soient tous deux égaux à 5.

Exercice n°29 — Dérivation vectorielle



Considérons une toupie (*S*) d'axe de symétrie matérielle $(O,\vec{Z})$ dont la pointe *O* reste immobile dans le plan (   ).

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au plan (   ) tel que $\vec{z}$ vertical ascendant. Soit $R_3(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ un repère lié au solide (S).

Le paramétrage de la position de R_3 par rapport à R_0 est défini généralement par les trois angles d'Euler   ,   et   . On note $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ et $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$ les bases intermédiaires.

Un autre système de paramétrage peut être envisagé. On utilise les trois angles a, b et c et les bases intermédiaires associées : $(\vec{i},\vec{y},\vec{j})$ et $(\vec{k},\vec{Y},\vec{j})$.

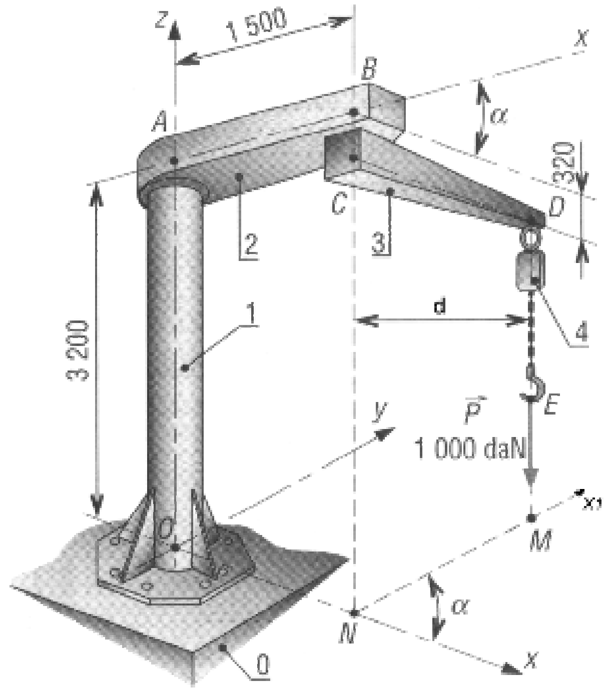
1 – Faire des figures illustrant ces deux systèmes de paramétrage.

2 – Calculer avec le premier système de paramétrage, les vecteurs : $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{X}\right]_{R_0}$, $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{X}\right]_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}$ et $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{y}\right]_{R_3}$.

3 – Calculer avec le second système de paramétrage, les vecteurs : $\frac{d}{dt}\left[\vec{z}\right]_{R_0}$ et $\frac{d}{dt}\left[\vec{x}\right]_{R_3}$.

Exercice n°30 Potence

On considère une potence de manutention représentée ci–dessous :



Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au sol (0).

Le corps (1) de la potence est fixé au sol (0) par une liaison encastrement. La tête (2) est encastrée au point A sur le corps (1). Au point C, le bras (3) fait l'objet d'un guidage en rotation autour de l'axe vertical $(C,\vec{z})$ par rapport à (2). L'axe de symétrie du bras (3) définit ainsi une axe mobile $(C,\overrightarrow{x1})$. On notera $\alpha = (\vec{x},\overrightarrow{x1})$. Le palan (4) est accroché au point D, $D \in (C,\overrightarrow{x1})$, sur le bras (3) et peut se déplacer en translation suivant la direction $\overrightarrow{x1}$. On notera $\overrightarrow{CD} = d.\overrightarrow{x1}$, ($d$ variable). Enfin la charge située au point E peut monter ou descendre suivant l'axe $(D,\vec{z})$. On notera $\overrightarrow{ED} = h.\vec{z}$, ($h$ variable).

1 – Calculez l'expression de la vitesse du point E par rapport au repère fixe R.

2 – Calculez l'expression de l'accélération du point E par rapport au repère fixe R.

Quelques éléments de réponse

Exercice n°1 : $\vec{v}(T/R) = -R\dot{\psi}\cos\theta\vec{x}_1 + R\dot{\theta}\vec{z}_2$, $\vec{a}(T/R) = R\left[2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\vec{x}_1 - \dot{\psi}^2\vec{y}_1 - \dot{\theta}\vec{y}_2 + \ddot{\theta}\vec{z}_2\right]$,
$F_R = 2mV\dot{\psi}\sin\theta = 116$ N

Exercice n°2 : $\vec{v}(C/R) = b\left(\dot{\theta}\sin\theta\vec{x}_2 - \dot{\varphi}\vec{y}_2\right)$

Exercice n°3 : $V(S/R) = \left\{\begin{array}{l}\vec{\omega}(S/R) = \dot{\psi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{i} \\ \vec{v}(A/R) = 2l\left(\left(\vec{j} - \sin\theta\vec{z}\right) - \dot{\psi}\sin\theta\vec{i}\right)\end{array}\right._A$

Exercice n°4 : $\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{R_4(R_5 - R_1)}{R_5(R_4 - R_1)}$

Exercice n°5 : $\dot{\gamma}r_2 = \dot{\beta}r_0$ et $2\dot{\beta}(r_0 + r_2) = \dot{\alpha}(r_0 + 2r_2)$

Exercice n°6 : $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\theta}} = \frac{\left[-\cos\alpha(1+\sin\beta)+\cos\beta(1-\sin\alpha)\right](h\tan\alpha - r\cos\gamma)}{\left[-\cos\alpha(1+\sin\gamma)-\cos\gamma(1-\sin\alpha)\right](h\tan\alpha + r\cos\beta)} = 0{,}254$

Exercice n°7 : $\vec{v}(A,1/2) = r\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\vec{y}_2$; $\vec{OI} = \left(r\cos\alpha + \frac{1}{\dot{\beta}-\dot{\alpha}} r\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\sin\beta\right)\vec{X}$

avec $r\sin\alpha + \frac{1}{\dot{\alpha}-\dot{\beta}} r\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\cos\beta = 0$

Exercice n°9 : $\vec{v}(G/0) = -\omega_{10}\frac{h}{2}\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\vec{x}_2$

Exercice n°12 : $i = -\frac{l' - l\cos\alpha + r\sin\alpha}{l' - l\cos\alpha - r\sin\alpha}$

Exercice n°14 : $\left\|\vec{v}(C,8/0)\right\| \approx 96{,}7\,mm\cdot s^{-1}$

Exercice n°16 : 1 – $\vec{a}(M/R) = \dot{a}\vec{y}_1 - a\dot{\alpha}\vec{x}_1$

2 – $\vec{a}(M/R_1) = \dot{a}\vec{y}_1 + a\dot{\alpha}\vec{x}_1 - \ddot{\alpha}\vec{z}\wedge\overrightarrow{OM} + a\dot{\alpha}^2\vec{z}\wedge\left(\vec{z}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$

Cette quantité ne peut être complètement déterminée que si l'on connaît $\overrightarrow{OM}$

Exercice n°17 : 2 – $\vec{v}(M,R_1/R) = R\dot{\varphi}\vec{y}_1$, $\vec{a}(M,R_1/R) = R\left(\ddot{\varphi}\vec{y}_1 - \dot{\varphi}^2\vec{x}_1\right)$

3 – $\alpha = \arctan(\tan\varphi\cos\theta)$, $\beta = \arcsin(\sin\varphi\sin\theta)$

Exercice n°18 :1 – ellipse d'équation : $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$

Exercice n°20 : $_A\begin{cases}0\\ \vec{M}(A) = 4\vec{y}\end{cases}$

Exercice n°21 : 2 – $\vec{M}(O,\vec{v}) = -6\vec{x} - 16\vec{y} + 2(\cos\theta + 4)\vec{z} - 4\vec{v}$

Exercice n°22 : = 1, = –2, = 1

Exercice n°27 : 1 – $\left[\frac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R = r\omega\vec{y}_1 + r\omega\tan\alpha\vec{z}$, $\left[\frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}\right]_R = -r\omega^2\vec{x}_1$

Exercice n°28 : $_O\begin{cases}\vec{R} = -2(\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z})\\ \vec{M}(O) = 5\vec{x} + 5\vec{y} - 3\vec{z}\end{cases}$

Humour

Pourquoi ceux qui roulent en Harley mettent-ils des vestes à franges ?

Pour voir dans quel sens ils roulent