# La cycloïde

## Encyclopædia Universalis 4, 751, Calcul infinitésimal – Histoire

Quelques problèmes privilégiés ont joué dans ce contexte un rôle particulièrement fécond. On sait déjà que la cycloïde fut un centre d'intérêt extrêmement vivant, entre 1637 et 1645 ; elle le redevint, entre 1658 et 1660, lorsque Pascal en fit le thème de ses célèbres défis et en développa différentes propriétés. Il convient de noter que les divers opuscules publiés, à cette occasion par Pascal, regroupés en 1659 dans les *Lettres de Dettonville*, donnent, en quelque sorte, un tableau des techniques de calcul des indivisibles parvenues à l'état ultime de leur développement, quelques années avant qu'elles ne soient supplantées par les méthodes plus générales, plus rationnelles et plus puissantes du calcul infinitésimal. Le refus de Pascal d'adopter toute symbolique de type algébrique est certainement la raison principale pour laquelle son effort ne prépare pas une telle rénovation, mais c'est de son traité que Leibniz, vers 1675, tirera l'un des éléments fondamentaux de sa synthèse : le triangle différentiel $dx$, $dy$, $ds$.

## Taton – La science moderne, De 1450 à 1800,

1– (Koyré revu par Taton, p. 44) On attribua à Charles de Bouelles (Bovillus ; 1470 ? – 1553), disciple de Nicolas de Cues, très connu comme philosophe et théologien, la découverte de la cycloïde ; il la confond en fait avec un arc de cercle et cherche à l'utiliser dans ses tentatives de quadrature du cercle, inspirées sans doute par Nicolas de Cues.

2– (Itard, pp. 231–32) Les techniques de Descartes et de Fermat, intimement dépendantes de la géométrie analytique, ne pouvaient s'appliquer telles quelles qu'aux seules courbes «géométriques»[1]. Conscient l'un et l'autre de cette imperfection, ils y obvient chacun à sa manière. Ici encore Fermat l'emporte incontestablement sur son rival. Descartes, à vrai dire, ne s'occupe du problème qu'une seule fois, pour placer les tangentes à la roulette ou cycloïde. Il remplace avec bonheur le cercle générateur par un polygone, ce qui lui fait trouver le centre instantanné de rotation et la propriété de la normale à la courbe de passer par son centre. . .

3– (Itard, pp. 235–36) Les problèmes sur la cycloïde ou courbe décrite par un point lié à un cercle qui roule sans glisse sur une droite, se rattachent aux précédents mais concernent les fonctions trigonométriques. Posé parait-il par Mersenne à Roberval, étudié dit-on encore par Galilée, le problème de la quadrature d'une arche de la courbe fut résolu d'abord par Roberval en 1637, grâ ce à un procédé fort simple et ingénieux. À cette occasion Roberval inventait la sinusoïde ou, pour lui, la «compagne de la roulette». Dès que Fermat et Descartes apprirent le succès de cette intégration, ils en donnèrent leur propres solutions, suivies, quelques années plus tard, par Torricelli. La tangente fut trouvées par Roberval, le promoteur qui inventa à cette effet sa méthode cinématique, puis presque simultanément, en 1638, par Descartes, grâce à l'utilisation du centre instantané de rotation, et par Fermat, grâ à ses techniques générales. En 1641, Torricelli découvrait de son côté la méthode cinématique que Viviani appliquait à son tour, en 1643, à la construction de la tangente à la cycloïde.

Roberval et Torricelli calculent tous deux le volume engendré par rotation de l'arche autour de la base et Torricelli croit même, en 1644, avoir trouvé le volume obtenu par rotation autour de l'axe et la position exacte du centre de gravité de la plaque formée par la demi-arche. Il donne son résultat sans démonstration.

Roberval se met au travail, constate une erreur en effectuant une intégration approchée, fait demander à son émule s'il est bien sûr de lui, et arrive enfin, fin 1645, après deux ans de labeur au résultat exact. Il perfectionne à cet effet les techniques d'intégration. Ses propres méthodes seront améliorées et étendues par Pascal, lors de la grande querelle de 1658, sous les problèmes que ce dernier sous le pseudonyme de Dettonville, pose à tous les mathématiciens, au sujet de la cycloïde.

4– (Itard, pp. 241–42) Nous voici revenus à la courbe probablement la plus importante de toutes celles qu'à étudié le XVII$^{e}$ siècle. Pascal expose à son sujet une admirable mise au point de la technique des indivisibles dont il tire le maximum et qui arrive ici à son apogée. Mais Wren (1632–1723) qui, comme architecte, reconstruira Londres après le grand incendie, rectifie l'arc de la cycloïde simple. Immédiatement Pascal montre que ceux des deux autres espèces de cycloïdes se ramènent à des arcs d'allipses, et Fermat

1. Pour Descartes, une courbe plane est dite «géométrique» –on dit aujourd'hui, algébrique– si les coordonnées $x$ et $y$ sont reliées par une équation du type $P(x,y) = 0$ où $P$ est un polynôme.

démontre que les courbes déduites de la roulette par affinité orthogonale se rectifient soit par des arcs de cercles, soit par des arcs de paraboles...

Tout le monde fait alors usage du triangle caractéristique que Leibniz lisant Pascal, en 1673, sur les conseils de Huygens devait voir dans le *Traité des sinus du quart de cercle*. Il en tira un très grand usage, mais Dettonville lui-même l'utilisait en d'autres circonstances, par exemple dans sa lettre à Huygens sur la «dimensions des lignes courbes de toutes les roulettes».

Revenons à Huygens et à ses études sur le pendule. Il vient, avec l'outillage mathématique de son époque, outillage qui s'affine de plus en plus, de trouver la courbe isochrone. Il lui faut maintenant trouver la forme des lamelles réglant la longueur du fil pour que la masse du pendule simple décrive bien la roulette. Le fil restant normal à la trajectoire, il est amené à l'étude des développées et des développantes, théorie qu'il fonde et pousse jusqu'à ses conséquences les plus extrêmes. Il détermine les développées des coniques, montre que la développées d'une courbe géométrique est elle-même géométrique et rectifiable algébriquement, et que celle de la cycloïde est une cycloïde égale.

5– (Dugas et Costabel, pp. 277–78) Huygens, à l'aide de ses lois, s'attaque à la théorie du pendule. Il s'avait, avec Mersenne, que contrairement à l'affirmation de Galilé e, l'isochronisme des oscillations du pendule circulaire est limité aux petites oscillations. Huygens cherche à déterminer la durée de descente du pendule et à la comparer à celle d'une chute libre. Pour calculer cette durée par la méthode des indivisibles, Huygens remplace l'arc de cercle décrit par le pendule par la parabole osculatrice au point le plus bas. Il obtient ainsi la période des petites oscillations du pendule.

Mais ce résultat ne satisfait Huygens ni comme géomètre, ni comme horloger. Il veut un pendule isochrone à toute amplitude. Il faut pour cela qu'un certain point soit situé en toute rigueur sur la parabole : cela le conduit à substituer au pendule circulaire le pendule cycloïdal, dont il donne la théorie complète. Parallèlement, il construit des horloges cycloïdales.

Dugas – Histoire de la mécanique, pp. 177-178, Isochronisme du pendule cycloïdal.

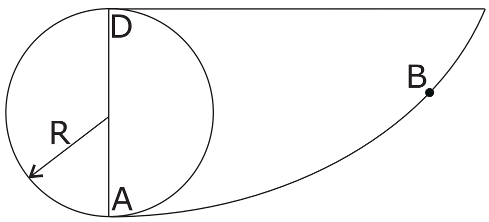
Par des raisonnements de géométrie infinitésimale qui sont admirables, mais qui n'exigent pas moins de douze propositions, et que nous ne pouvons reproduire ici, Huygens parvient à établir l'isochronisme du pendule cycloïdal, qu'il énonce dans les termes suivants :

«*Proposition XXV. – Dans une cycloïde à axe vertical et dont le sommet se trouve en bas, les temps de descente dans lesquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, sont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde, une raison égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle de son diamètre.*»

Il est facile de souder ce résultat à l'analyse aujourd'hui classique. On sait en effet que le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde répond à l'équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R}s = 0$$

Si le mobile part du point $B$, tel que l'arc $AB$ soit égal à $s_0$, sans vitesse initiale, on a simplement : $s = s_0 \cos\sqrt{\frac{g}{4R}}t$. Le sommet $A$ est atteint au bout du temps $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{4R}}$.




Or le mobile mettrait à tomber en chute libre suivant $DA$, un temps $T'$ défini par $2R = \frac{1}{2}gT'^2$, d'où $T' = \sqrt{\frac{4R}{g}}$. On a donc bien $\frac{T'}{T} = \frac{\pi}{2}$, ce qui est l'énoncé de Huygens [2].

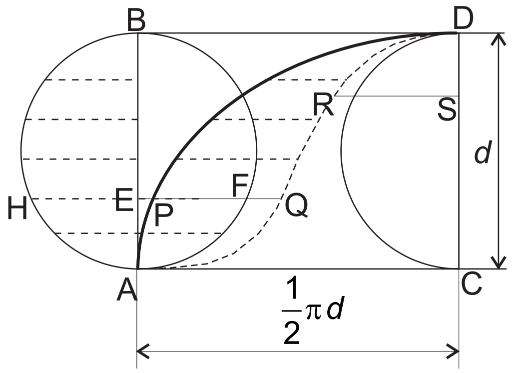
2. Il est utile de noter que l'étude de la cycloïde était très actuelle chez les géomètres du XVII$^{e}$ siècle : Wren avait calculé sa longueur, Roberval en avait définit la tangente, Pascal déterminéle centre de gravité et calculé l'aire, et Wallis faisait des recherches analogues.

Nous passons ici sur la troisième partie du Traité de Huygens, consacrée à l'évolution des lignes courbes. Il s'agit en fait de la recherche des dévellopées. Huygens appelle *evoluta* la développée, et *descripta ex evolutione* la développante. Il établit notamment la développée d'une cycloïde, ce qui justifie rationnellement le tracé de son horloge. Il étudie également les développées des coniques, notamment celle de la parabole, qu'il nomme *paraboloïdes*[3].

### Dahan et Peiffer–Une histoire des mathématiques, Routes et dédales, pp. 180-81, Roberval.

Roberval utilise les indivisibles pour déterminer l'aire comprise sous une arche de cycloïde. La cycloïde ou roulette courbe décrite par le point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite –elle «*n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue quand elle roule de son mouvement ordinaire*», dira Pascal–, est la courbe la plus à la mode au XVII$^{e}$ siècle ; elle permet aux géomètres de mettre au point les nouvelles techniques à l'origine du calcul infinitésimal.

Supposons que le cercle $AHBF$ de diamètre $d$ (voir figure) roule sur la droite $D$ et qu'après un demi-tour le diamètre $AB$ du cercle générateur se trouve en $DC$. Le segment $AC$ doit alors être égal à la demi-circonférence $AFB$ et $APD$ sera la cycloïde décrite par le point $A$. Si $P$ est un point quelconque de la cycloïde et $Q$ décrira une courbe $AQD$, appelée la «compagne de la cycloïde», qui n'est autre que la sinusoïde.




Roberval démontre à l'aide des indivisibles que cette courbe doit partager le rectangle $ABDC$ en deux parties égales. En effet, à tout segment $EQ$ de la partie $AQDB$ correspond un segment égal $RS$ de la partie $ACDQ$, et les deux surfaces ayant leurs indivisibles consécutifs égaux doivent avoir des aires égales. Or le rectangle $ABCD$ a une base $AC$ égale à la demi-circonférence $AFB$ et une hauteur $AB$ égale au diamètre $d$ du cercle générateur. Son aire vaut donc

$$\frac{1}{2}(d\cdot\pi d)=\frac{1}{2}\pi d^2=2\pi(\frac{d}{2})^2$$

c'est-à-dire deux fois l'aire du cercle. L'aire $AQDC$ est donc égale à celle du cercle générateur. Par construction, l'aire $APDQ$ vaut celle du demi-cercle et l'aire $APDC$ sous la demi-arche, étant la somme des deux aires $APDQ$ et $AQDC$, vaut 1,5 fois l'aire du cercle générateur.

## Étude mathématique de la cycloïde

Considérons un cercle $C$, de centre $\Omega$ et de rayon $a$, qui roule sans glisse sur une droite $D$. Tout point $M$ lié au cercle a pour trajectoire une courbe que l'on nomme *cycloïde*.

Prenons pour origine $O$ un des points de la droite $D$ atteints par le point $M$. À un instant quelconque, le cercle $C$ est en contact avec la droite $D$ en $P$ ; Nous orientons $D$ dans le sens du mouvement de $P$ et nous choisissons le vecteur unitaire $\mathbf{i}$ de $D$ dans ce sens ; le vecteur $\mathbf{j}$ s'en déduit dans le plan orienté pour constitué la base orthonormée directe $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$.

Le roulement sans glissement se traduit par

$$\|\mathbf{OP}\|=\text{arc }\mathbf{MP}$$

3. Huygens connaissait dès 1659 la développée de la parabole, dont il s'était occupé avec Jean van Heuraet de Harlem.

Choisissons le paramètre $t$ de façon que

$$\text{abscisse de } P = at$$

Alors, le roulement sans glissement entraîne

$$(\mathbf{\Omega M},\mathbf{\Omega P}) \equiv t \pmod{2\pi}$$

d'où l'on déduit

$$(\mathbf{OI},\mathbf{\Omega M}) = (\mathbf{OI},\mathbf{\Omega P}) + (\mathbf{\Omega P},\mathbf{\Omega M}) \equiv \ -\frac{\pi}{2} - t \pmod{2\pi}$$

Il en résulte que les composantes de $\mathbf{\Omega M}$ sont

$$\mathbf{\Omega M}\left\{\begin{array}{l} a\cos(-\frac{\pi}{2}-t) = -a\sin t \\ a\sin(-\frac{\pi}{2}-t) = -a\cos t \end{array}\right.$$

De la relation

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OP} + \mathbf{P\Omega} + \mathbf{\Omega M}$$

on en déduit les coordonnées du point $M$

$$f(t)\left\{\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}\right.$$

$f$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$.

Il suffit d'étudier l'arc $(\mathrm{I},f)$ avec $\mathrm{I} = [0,2\pi]$ (que l(on nomme arche de cycloïde), le reste de la courbe se déduisant évidemment de cet arc par des translations $\pm 2\pi\mathbf{i}$.

*Longueur d'une arche*

Calculons d'abord

$$f'(t)\left\{\begin{array}{l} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t \end{array}\right.$$

On en déduit

$$\|f'(t)\|^2 = a^2[(1-\cos t)^2 + \sin^2 t] = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

et puisque $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ pour $t \in \mathrm{I}$, on obtient

$$\|f'(t)\| = 2a\sin\frac{t}{2}$$

La longueur d'une arche vaut alors

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a[\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8a$$

*Repère de Frenet et courbure*

Nous supposons que l'arc $(\mathrm{I},f)$ est direct (l'orientation de la courbe est dans le sens du mouvement du point $M$). On a alors

$$(\forall t \in \mathrm{I})\ \frac{ds}{dt} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

Pour le repère de Frenet, $\mathbf{T} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ a pour composantes $(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})^t$. On a donc

$$\alpha = (\mathbf{i},\mathbf{T}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \pmod{2\pi}$$

et comme

$$(\mathbf{T},\mathbf{N}) = +\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{i},\mathbf{N}) \equiv \pi - \frac{t}{2} \pmod{2\pi}$$

les composantes de $\mathbf{N}$ sont $(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2})^t$.

Le rayon de courbure relatif vaut alors

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = (2a\sin\frac{t}{2})(-2) = -4a\sin\frac{t}{2}$$

*Développée de la cycloïde*

Le centre de courbure $C$ au point $M$ est défini par

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM} + \rho\mathbf{N}$$

La développée de l'arche (I,$f$) est alors l'arc (I,$g$) défini par

$$\mathbf{OC} = g(t) \left\{ \begin{array}{l} x = a(t-\sin t) + 4a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = a(t+\sin t) \\ y = a(1-\cos t) - 4a\sin^2\frac{t}{2} = -1(1-\cos t) \end{array} \right.$$

Effectuons le changement de paramètre en posant

$$t = \pi + u$$

Le nouveau paramètre $u$ parcourt l'intervalle $\mathrm{J} = [-\pi, +\pi]$ et l'arc (I,$g$) de la développée est équivalent à l'arc (J,$g_1$), avec

$$\mathbf{OC} = g_1(u) \left\{ \begin{array}{l} x = a\pi + a(u-\sin u) \\ y = -2a + a(1-\cos u) \end{array} \right.$$

Considérons la translation $(v)$ de composantes $(a\pi, -2a)^t$ et l'arc (J,$f$) de la cycloïde proposée ; on voit que

$$(\forall u \in \mathrm{J}) \quad g_1(u) = \mathbf{v} + f(u)$$

*L'arc (I,$g$) de la développée se déduit de l'arc (J,$f$) de la cycloïde proposée par la translation* $\mathbf{v}$.

*La développée d'une cycloïde est donc une cycloïde déduite de la première par translation.*