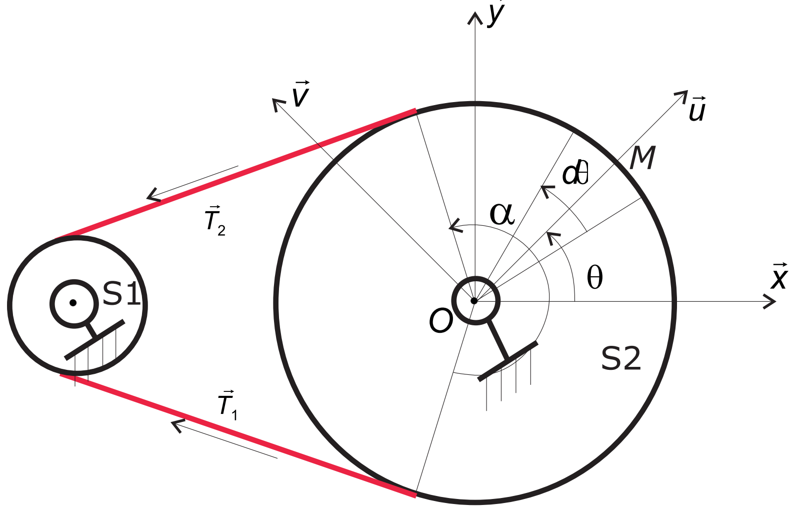
Frottement exponentiel

Objet de l'étude

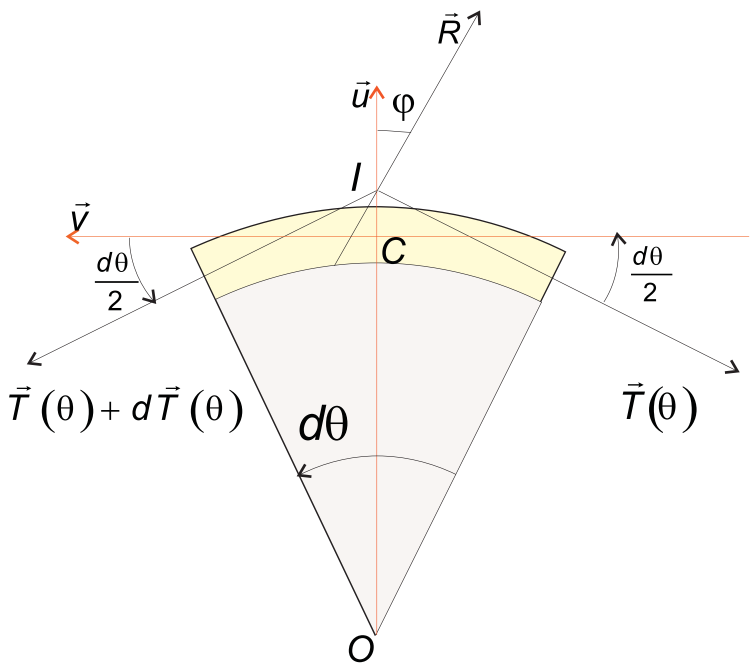
Dans les mécanismes à courroies, la friction est du type frottement de glissement entre une courroie flexible et les éléments (poulies) en rotation. Cette courroie permet de transformer le mouvement de rotation de la poulie menante $S1$ en mouvement de même nature sur la poulie menée $S2$.

On désire connaître ici, la relation entre les tensions ($\overrightarrow{T}_1$ et $\overrightarrow{T}_2$) dans les brins non enroulés de la courroie.



Modélisation et hypothèses

- Le coefficient de frottement entre la poulie $S2$ et la courroie est noté $f = \tan\varphi$,
- L'épaisseur de la courroie, et par là même sa masse, sont négligeables par rapport aux éléments de même dimension,
- Le contact entre la poulie $S2$ et la courroie se fait avec un angle α, appelé angle d'enroulement,
- On se place à la limite du glissement.



Résolution du problème

On suppose le système en mouvement permanent pour pouvoir appliqué le Principe Fondamental de la Statique - *Rappelons que la masse, et donc l'inertie, sont négligées dans cette étude.*

On isole un élément de courroie de longueur dl et on indique les torseurs modélisant les actions mécaniques s'exerçant sur cet élément en équilibre.

– Action de la partie amont sur l'élément :

$$\mathcal{T}(\theta) = {}_I\begin{cases} \overrightarrow{T}(\theta) \\ 0 \end{cases}$$

– Action de la partie aval sur l'élément :

$$\mathcal{T}(\theta + d\theta) = {}_I\begin{cases} \overrightarrow{T}(\theta) + d\overrightarrow{T}(\theta) \\ 0 \end{cases}$$

– Action de la poulie $S2$ sur l'élément :

$$\mathcal{T}(S2) = {}_I\begin{cases} \overrightarrow{R} \\ 0 \end{cases}$$

Appliquons le théorème de la résultante statique à l'élément ; il vient :

$$\begin{array}{c} R\cos\varphi - (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\frac{d\theta}{2} = 0 \\ -R\sin\varphi + (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} = 0 \end{array}$$

Linéarisons ces deux expressions qui deviennent alors :

$$\begin{array}{c} R\cos\varphi - Td\theta = 0 \\ dT - R\sin\varphi = 0 \end{array}$$

On en déduit alors simplement en effectuant le rapport ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$),

$$\frac{dT}{T} = tan\varphi d\theta = fd\theta$$

L'intégration de cette équation différentielle est immédiate, et l'on obtient :

$$T(\theta) = k\exp(f\theta)$$

Pour déterminer la constante k, on se place en $\theta = -\alpha/2$ pour laquelle on a $T(-\alpha/2) = T_1$, et par conséquent :

$$\boxed{T(\theta) = T_1\exp(f(\theta + \alpha/2))}$$

À partir de cette expression, connaissant la valeur de T_1, on peut en déduire celle de T_2 en se plaçant en $\theta = \alpha/2$:

$$T_2 = T_1\exp(f\alpha)$$

Lors de la mise en place de la courroie sur les deux poulies, on impose une tension T_0 à la courroie (en utilisant, par exemple, un tendeur de courroie). En absence de mouvement du système, l'équilibre de la poulie impose $T_1 = T_2 = T_0$. Ce même équilibre induit, lors d'un mouvement permanent la relation :

$$T_1 + T_2 = 2T_0$$

En mouvement permanent, nous pouvons écrire le théorème du moment statique en projection sur l'axe perpendiculaire au plan des poulies. On a, si l'on note C_2 le couple exercé par le récepteur lié à la poulie réceptrice $S2$:

$$C_2 = (T_2 - T_1)r_2$$

dans laquelle r_2 désigne le rayon moyen de la poulie.

À partir des deux dernières relations, on peut déterminer les tensions T_1 et T_2 en fonction de la tension de pose T_0 et du couple récepteur C_2. On obtient, en effet :

$$T_2 = T_0 + \frac{C_2}{2r_2} \qquad \text{et} \qquad T_1 = T_0 - \frac{C_2}{2r_2}$$

Autre application du frottement exponentiel

La relation encadrée de la page précédente peut être utilisée pour déterminer le nombre de tours à réaliser autour d'un winch afin de démultiplier l'effort exercé par un équipier sur le «bout »pour border (tendre) une voile.

On suppose que l'action de la voile sur le bout qui la retient a pour valeur $T_2 = 4000$ N et que celle fournie par l'équipier est de $T_1 = 200$ N. Le coefficient de frottement entre le tambour du winch et le cordage est $f = 0,3$. Déterminons le nombre de tours sur le winch, On a :

$$4000 = 200 \exp 0,3\alpha$$

Ce qui donne finalement

$$\alpha \approx 1,6 \text{ tour}$$

remarque historique : La poulie est mentionnée pour la première fois dans les *Mechanica*, œuvre de l'école d'Aristote (IV$^{\text{e}}$siècle). Il semble qu'elle ait été ignorée des empires orientaux.