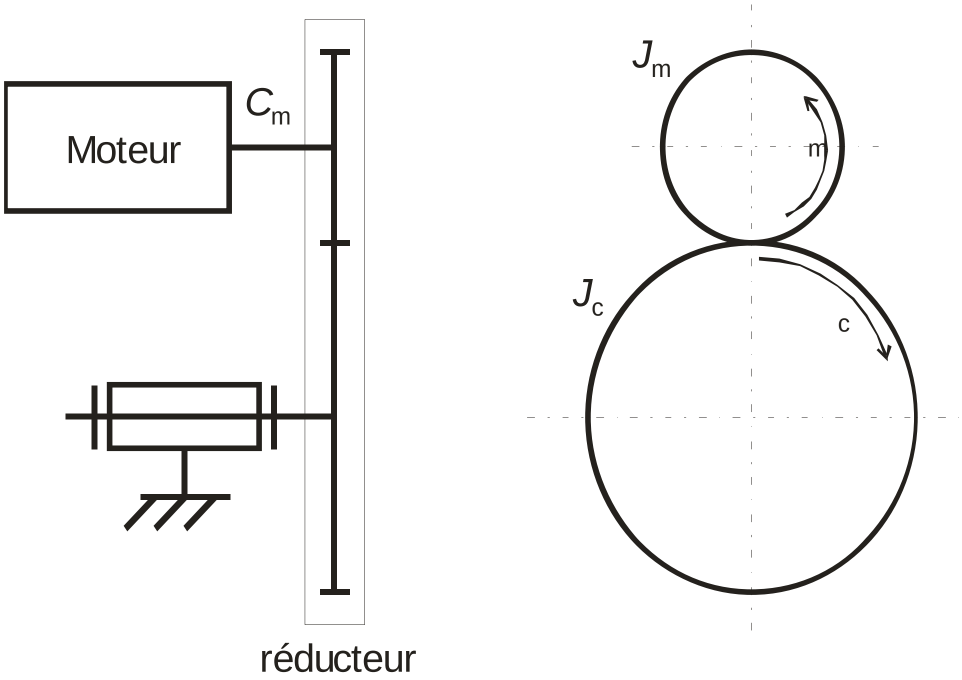
Rendement et inertie équivalente

Voici le raisonnement proposé que je conteste totalement.

Début du raisonnement



Appliquons le Principe fondamental de la dynamique à l'arbre moteur 1 :

$C_m - C_{ered} = J_m \times \frac{d\omega_m}{dt}$ (1) avec C_{ered} le couple résistant du réducteur sur l'arbre moteur

Appliquons le Principe fondamental de la dynamique à l'arbre 2 :

$C_{sred} = J_c \times \frac{d\omega_c}{dt}$ (2) avec C_{sred} le couple moteur délivré par le réducteur sur l'arbre 2

Ecrivons, par ailleurs, la transmission par le réducteur avec le rendement η :

$$\eta = \frac{C_{sred} \times \omega_c}{C_{ered} \times \omega_m} \quad (3)$$

De plus , rappelons que le rapport de transmission s'exprime $k = \frac{\omega_m}{\omega_c}$ et par dérivation :

$$\frac{d\omega_m}{dt} = k \times \frac{d\omega_c}{dt} \quad (4)$$

La combinaison de ces quatre relations conduit à la relation finale :

$$C_m = (J_m + \frac{J_c}{\eta \times k^2}) \times \frac{d\omega_m}{dt}$$

où l'inertie équivalente de la charge ramenée sur l'arbre moteur apparaît comme le terme $\boxed{J_{equi} = \frac{J_c}{\eta \times k^2}}$

Ainsi nous voyons bien l'influence du rendement :

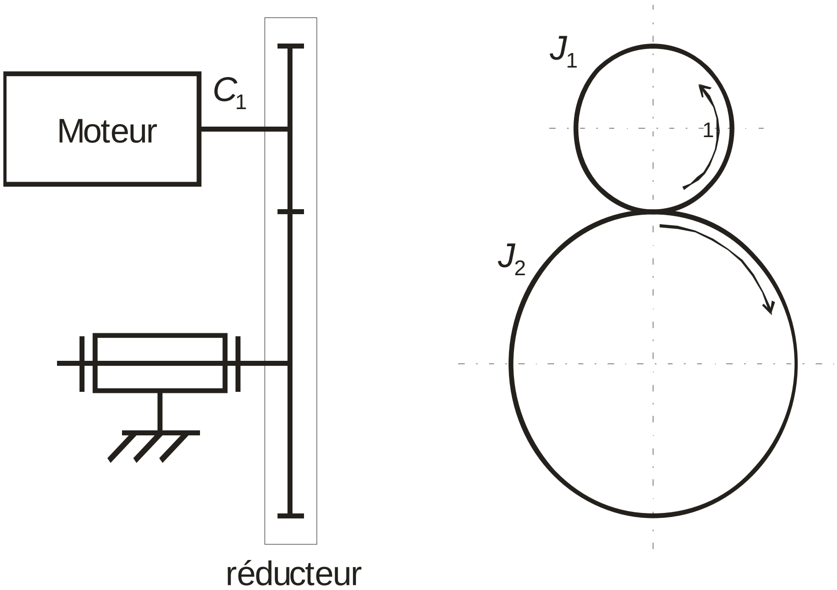
- pour un rendement faible du réducteur , l'inertie équivalente apparaît sur l'arbre moteur plus importante et donc le couple moteur nécessaire aussi.
- et anecdotiquement , un rendement nul nécessite un couple moteur infini !

Fin du raisonnement

Dans ce calcul, le résultat obtenu montre que l'inertie dite « équivalente » du réducteur dépend de l'endroit où l'on met le moteur.

En effet, je modifie les notations pour ne pas employer *m* pour moteur et *c* pour charge.

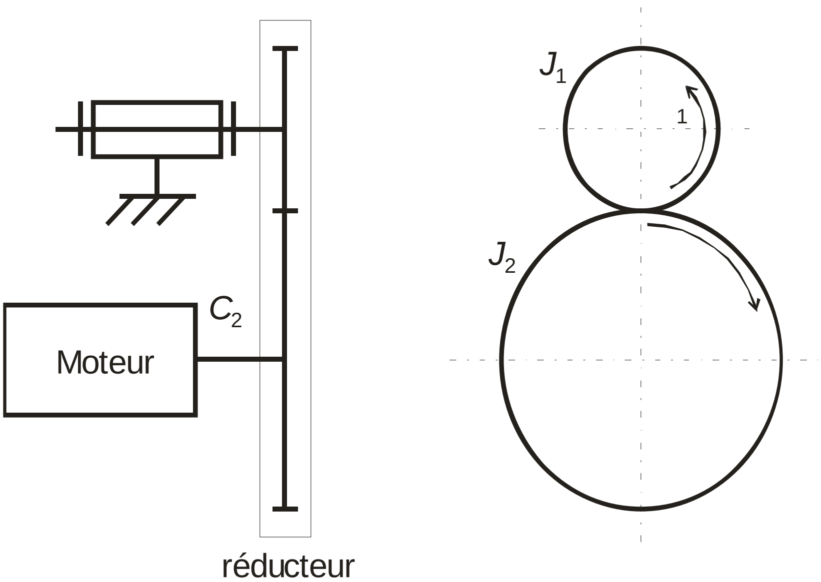
Le schéma ci-dessus devient alors



Le résultat s'écrit donc

$$C_1 = (J_1 + \frac{J_2}{\eta \times k^2}) \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = J_{eq} \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$$

Plaçons maintenant le moteur sur l'arbre 2. On obtient alors le schéma



En ramenant les calculs, toujours sur l'arbre 1, la méthode précédente conduit à

$$C_2 = (\frac{J_1 k}{\eta} + \frac{J_2}{k}) \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = J'_{eq} \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$$

C'est-à-dire, pour le même réducteur, juste en changeant la position du moteur, je change l'inertie du réducteur. Cela est, bien évidemment, faux, puisque le moment d'inertie d'un corps solide indéformable ne dépend que de sa masse et de sa géométrie ; c'est une valeur intrinsèque, indépendante de l'environnement.

Petit rappel : l'opérateur d'inertie d'un solide en un point A lié à ce solide est défini par Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\mathcal{I}(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \mathrm{d}m$.

Le bon raisonnement conduit, pour le moteur sur l'arbre 1, à

$$\eta C_1 = (J_1 + \frac{J_2}{k^2}) \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = J_{eq} \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$$

et pour le moteur sur l'arbre 2, à

$$\eta \frac{C_2}{k} = (J_1 + \frac{J_2}{k^2}) \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = J_{eq} \times \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$$

et là, bien évidemment, pas de changement de l'inertie… ouf !

« Je ne suis pas si convaincu de notre ignorance par les choses qui sont, et dont la raison nous est inconnue, que par celles qui ne sont point et dont nous trouvons la raison. Cela veut dire que non seulement nous n'avons pas les principes qui mènent au vrai mais que nous en avons d'autres qui s'accommodent très bien avec le faux. »

Fontenelle – Histoire des Oracles.