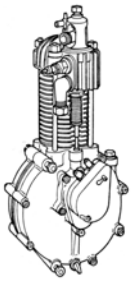

[1]

Liaisons mécaniques

Quel est le comble de la science ?

Un cheval-vapeur, qui mange des racines carrées dans un champ magnétique !

1 – Liaisons mécaniques

1.1 – Liaisons élémentaires

Une **liaison élémentaire** entre deux solides *S1* et *S2* est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à *S1* sur une surface géométrique élémentaire liée à *S2*. Les surfaces géométriques élémentaires obtenues à partir des principaux procédés d'usinage sont **le plan**, **le cylindre** et **la sphère**.

Le tableau ci–dessous donne les différentes combinaisons :

Contact plan/sphère
- ponctuelle ou sphère-plan,

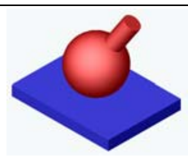
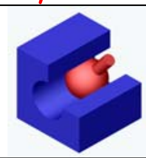
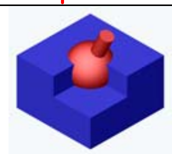
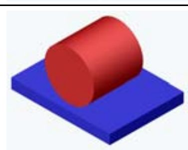
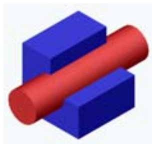
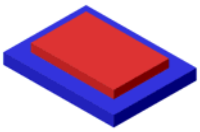
Contact plan/cylindre
- linéaire rectiligne,

Contact plan/plan
- appui plan,

Contact cylindre/sphère
- linéaire annulaire ou sphère-cylindre,

Contact cylindre/cylindre
- pivot glissant,

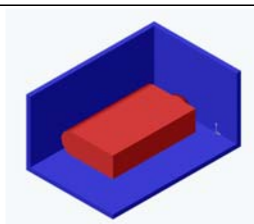
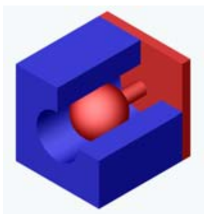
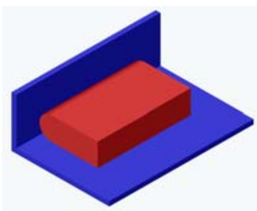
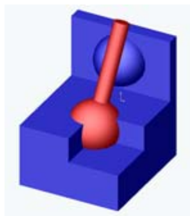
Contact sphère/sphère
- rotule ou sphérique.

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

1.2– Liaisons composées

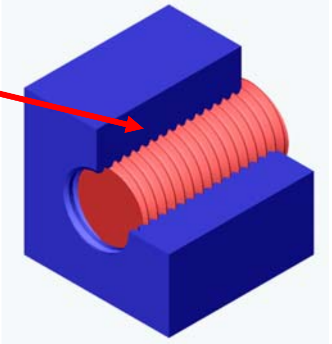
Une **liaison composée** est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires.

Le tableau ci–dessous donne les différentes associations possibles :

Encastrement			Pivot
Glissière			Sphérique à doigt

[1] Moteur de Dion Bouton vers 1900

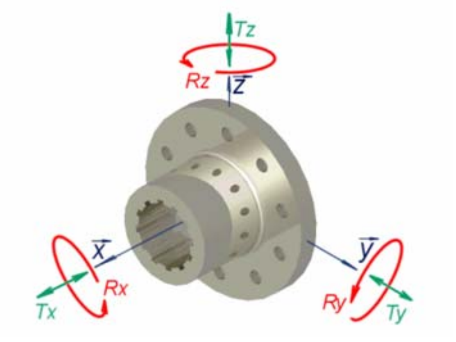
Autre liaison très utilisée : la liaison hélicoïdale



1.3 – Degrés de liberté ou de mobilité d'une liaison. Les degrés de liaison

Les **degrés de liberté** d'une liaison entre deux solides *S1* et *S2* correspondent aux mouvements relatifs indépendants autorisés au sein de cette liaison entre *S1* et *S2*.

6 mouvements élémentaires possibles d'un solide dans l'espace rapporté à un repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



- 3 translations : T_x, T_y, T_z,
- 3 rotations : R_x, R_y, R_z.

Notons *m* le degré de liberté d'une liaison.

Le **degré de liaison** d'une liaison vaut, dans l'espace, 6 – *m*

Dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$, les 3 mouvements possibles d'un solide sont :

- 2 translations : T_x, T_y
- 1 rotation : R_z.

Le **degré de liaison** d'une liaison vaut, dans le plan, 3 – *m*

1.4– Torseur d'action mécanique transmissible d'une liaison (pour mémoire)

1.5– Torseur cinématique d'une liaison (pour mémoire)

1.6– Torseur des petits déplacements d'une liaison (pour mémoire)

1.7 – Caractéristiques des différentes liaisons

Les caractéristiques d'une liaison parfaite sont :

- **des contacts sans frottement entre les surfaces ;**
- **des surfaces de contact géométriquement parfaites ;**
- **aucun jeu**.

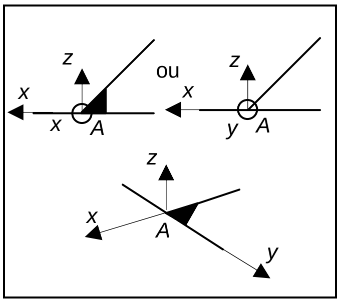
1.7.1 – Liaison encastrement

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison encastrement** s'il n'existe aucun degré de liberté entre les solides

– Référentiel local de réduction des torseurs

L'orientation du référentiel peut être quelconque



– Degré de mobilité

$T_x = T_y = T_z = R_x = R_y = R_z = 0$,

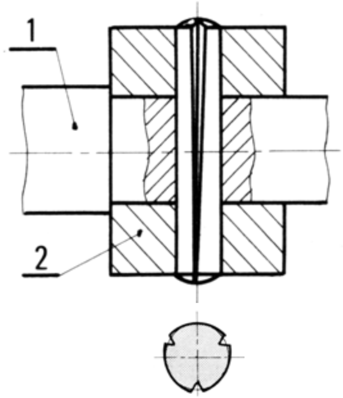
Le degré de mobilité est nul.

– Torseurs mécaniques

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A, \quad T(2 \to 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

– Exemple technologique

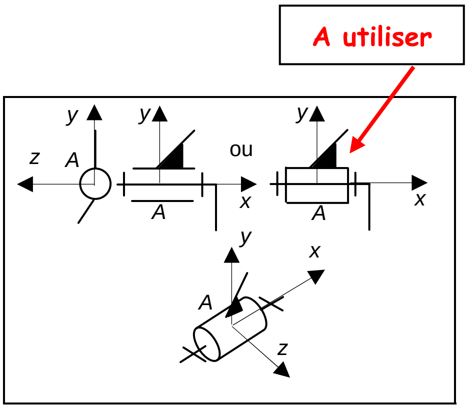
Assemblage de deux solides par goupille cannelée.



1.7.2 – La liaison pivot

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison pivot** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un axe.



– Référentiel local de réduction des torseurs

L'axe $(A, \vec{x})$ est l'axe de rotation relative de la liaison, le point de réduction appartient à l'axe.

– Degré de mobilité

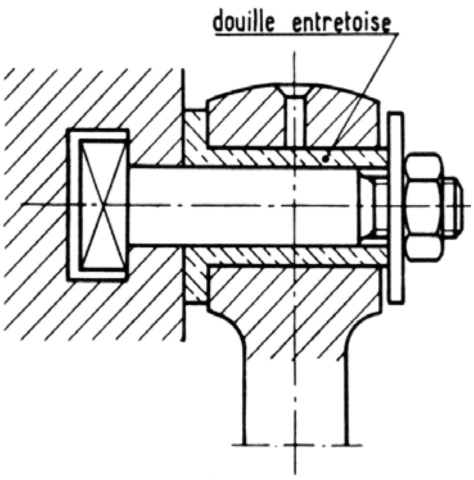
$R_x = 1$, le degré de mobilité est égal à 1.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ 0 \end{Bmatrix}_A, \quad T(2 \to 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

– Exemple technologique

Articulation sur coussinet.

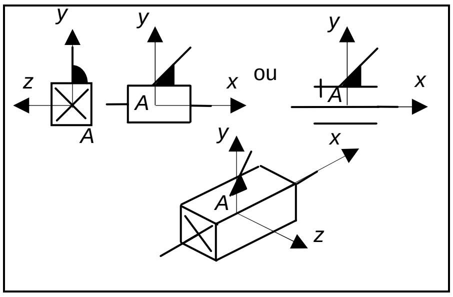


1.7.3 – Liaison glissière

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison glissière** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une translation le long d'un axe.

– Référentiel local de réduction des torseurs



L'axe $(A,\vec{x})$ est l'axe de translation relative de la liaison, le point de réduction appartient à l'axe.

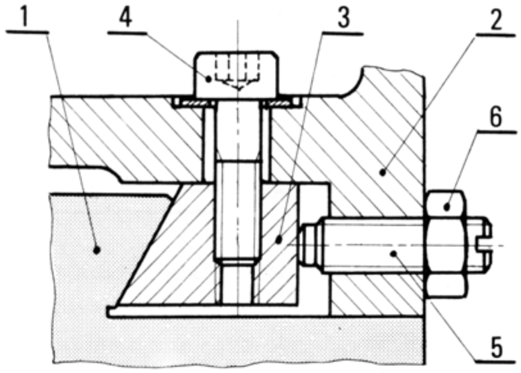
– Degré de mobilité

$T_x = 1$, le degré de mobilité est égal à 1.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A ,$$

$$T(2 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$



– Exemple technologique

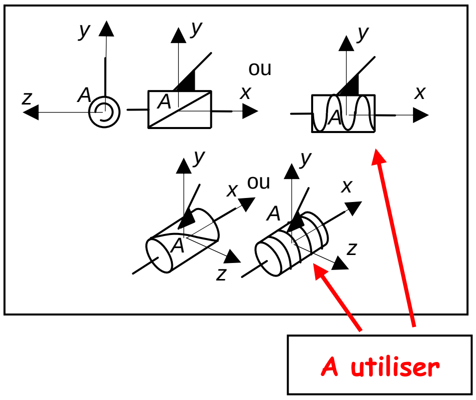
Liaison glissière par queue d'aronde avec rattrapage du jeu.

1.7.4 – Liaison hélicoïdale

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison hélicoïdale** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation proportionnelles par rapport à un axe.

– Référentiel local de réduction des torseurs



L'axe $(A,\vec{x})$ est l'axe de rotation et de translation relatives de la liaison, le point de réduction appartient à l'axe.

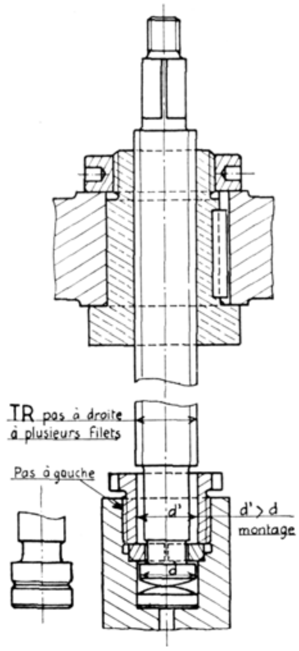
– Degré de mobilité

T_x et R_x sont dépendants. Si k est le pas, on a $k \times \theta_x = 2\pi \times \Delta_x$. **Le degré de liberté est égal à 1.**

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A , \quad T(2 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

avec $u - \frac{k}{2\pi} p = 0$, et $L + \frac{k}{2\pi} X = 0$



– Exemple technologique

Transmission de mouvement par vis en acier et écrou en bronze à filets trapézoïdaux.

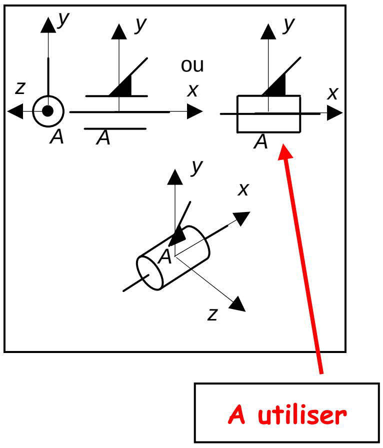
1.7.5 – Liaison pivot glissant

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison pivot glissant** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation par rapport à un axe.

– Référentiel local de réduction des torseurs

L'axe $(A, \vec{x})$ est l'axe de rotation et de translation relatives de la liaison, le point de réduction appartient à l'axe.

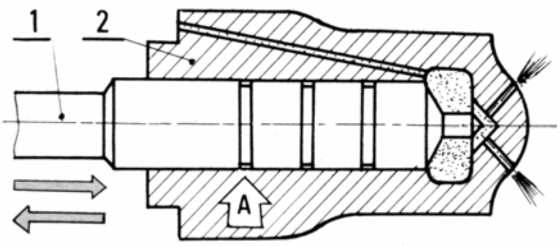


– Degré de mobilité

$T_x = 1$ et $R_x = 1$, le degré de mobilité est égal à 2.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix},\quad T(2 \rightarrow 1) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}$$



– Exemple technologique

Piston de gicleur de moteur à injection.

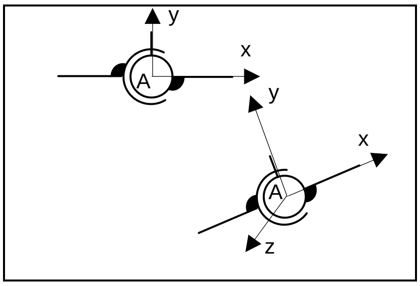
1.7.6 – Liaison sphérique à doigt

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison sphérique à doigt** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation par rapport à deux axes concourants.

– Référentiel local de réduction des torseurs

L'axe $(A,\vec{y})$ est confondu avec le doigt et l'axe $(A,\vec{z})$ est parallèle à la normale au contact entre le doigt de *S2* et *S1*. Le point de réduction est à l'intersection des axes $(A,\vec{y})$ et $(A,\vec{z})$.

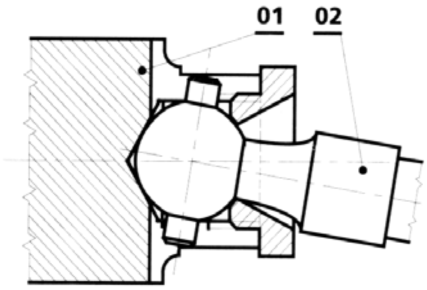


– Degré de mobilité

$R_y = 1$ et $R_z = 1$, le degré de mobilité est égal à 2.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}, \quad T(2 \to 1) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} \end{Bmatrix}$$



– Exemple technologique

Accouplement sphérique à ergots

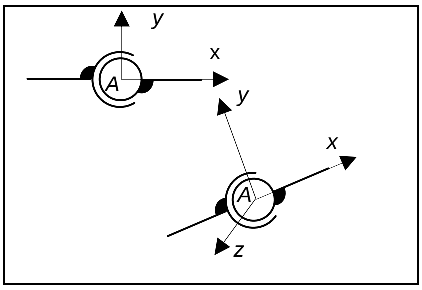
1.7.7 – Liaison sphérique ou rotule

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison sphérique ou rotule** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un point.

– Référentiel local de réduction des torseurs

Les axes, liés à un solide, peuvent être quelconque. Le point de réduction est au centre de la liaison.

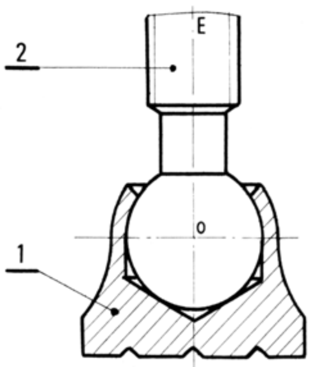


– Degré de mobilité

$R_x = 1$, $R_y = 1$ et $R_z = 1$, le degré de mobilité est égal à 3.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}, \quad T(2 \to 1) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{Bmatrix}$$



– Exemple technologique

Patin de serre–joint.

1.7.8 – Liaison appui plan

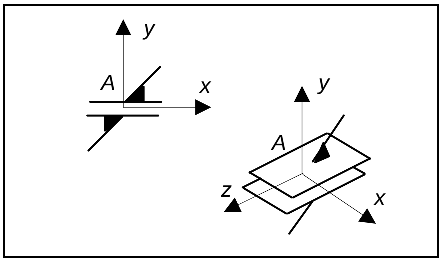
– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison appui plan** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un axe et de la translation le long de deux axes perpendiculaires au premier.

– Référentiel local de réduction des torseurs

L'axe $(A, \vec{x})$ est normal au plan de contact. Le point de réduction appartient au plan.

– Degré de mobilité

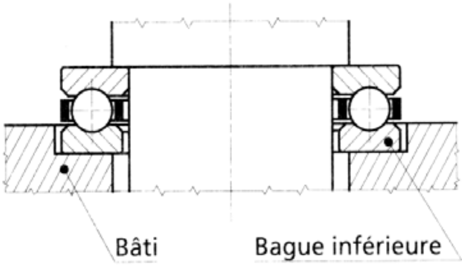


$R_x = 1$, $T_y = 1$ et $T_z = 1$, le degré de mobilité est égal à 3.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix}_A, \quad T(2 \to 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

– Exemple technologique



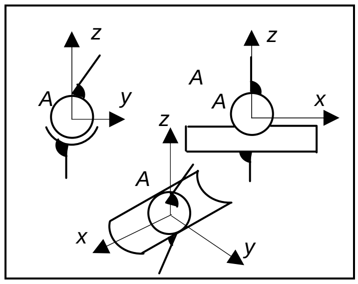
Butée à billes.

1.7.9 – Liaison linéaire annulaire ou sphère-cylindre

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison linéaire annulaire** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un point et d'une translation suivant un axe passant par ce point.

– Référentiel local de réduction des torseurs



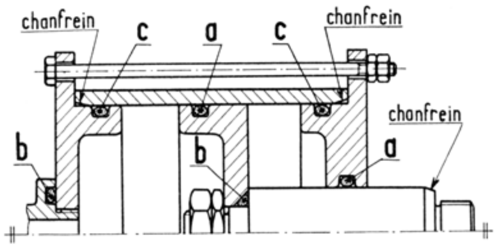
L'axe $(A, \vec{x})$ est l'axe de translation relative de la liaison. Le point de réduction est le centre de rotation.

– Degré de mobilité

$T_x = 1$, $R_x = 1$, $R_y = 1$ et $R_z = 1$, le degré de mobilité est égal à 4.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A, \quad T(2 \to 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$$



– Exemple technologique

Piston de longueur faible devant le diamètre dans cylindre.

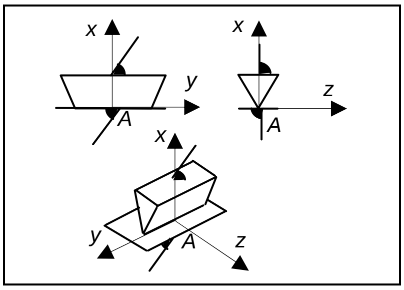
1.7.10 – Liaison linéaire rectiligne

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison linéaire rectiligne** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour de deux axes et de la translation le long de deux autres axes, l'une des rotations et l'une des translations étant relatives au même axe.

– Référentiel local de réduction des torseurs

L'axe $(A,\vec{y})$ est l'axe commun à la rotation et à la translation relatives de la liaison. L'axe (A;$\vec{x}$) est l'axe de l'autre rotation, et l'axe $(A,\vec{z})$ est l'axe de l'autre translation. Le point de réduction est sur l'axe $(A,\vec{y})$.



– Degré de mobilité

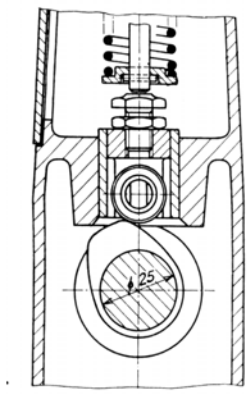
$T_y = 1$, $T_z = 1$, $R_x = 1$, et $R_y = 1$, le degré de mobilité est égal à 4.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2) = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix}_A, \quad T(2 \to 1) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

– Exemple technologique

Contact galet/came



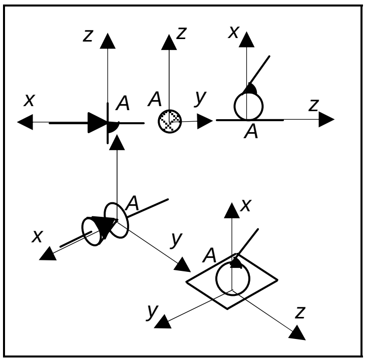
1.7.11 – Liaison ponctuelle ou sphère-plan

– Définition

Deux solides *S1* et *S2* sont en **liaison ponctuelle** si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation autour d'un point et de la translation le long de deux axes concourants en ce point.

– Référentiel local de réduction des torseurs

Les axes $(A,\vec{y})$ et $(A,\vec{z})$ sont les axes des translations relatives de la liaison. Le point de réduction est le centre de la liaison.



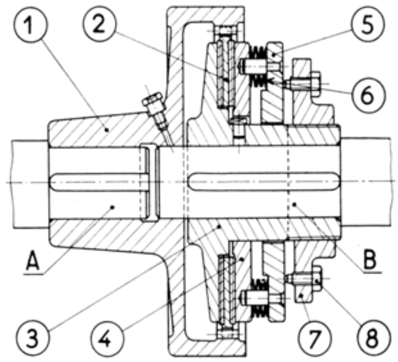
– Degré de mobilité

$T_y = 1$, $T_z = 1$, $R_x = 1$, $R_y = 1$, et $R_z = 1$.le degré de mobilité est égal à 5.

– Torseurs mécaniques associés

$$V(1/2)=\left\{\begin{matrix}\vec{\omega}=p\vec{x}+q\vec{y}+r\vec{z}\\\vec{V}(A)=v\vec{y}+w\vec{z}\end{matrix}\right\}_A,\quad T(2\rightarrow 1)=\left\{\begin{matrix}\vec{R}=X\vec{x}\\\vec{M}(A)=0\end{matrix}\right\}_A$$

– Exemple technologique



Appui des vis 8 sur le plateau 5.

1.8 – Modélisation d'un mécanisme, méthode d'analyse

Un mécanisme étant un ensemble de solides et de liaisons organisé, il est indispensable d'en faire une analyse et une représentation logique, conforme à sa structure.

Pour cela, on dispose d'outils appropriés :

- Le graphe de structure (ou graphe des liaisons) et le schéma cinématique dans le cas d'une étude géométrique et/ou cinématique ;

- Le graphe des liaisons et efforts, et le schéma d'architecture dans le cas d'une étude des efforts dans les liaisons, en statique ou dynamique.

1.8.1 – Modélisation cinématique

L'analyse d'un mécanisme débute par l'identification des groupes cinématiquement liés et des surfaces de contact qui les lient (liaisons), ce qui permet de construire son graphe de structure et son schéma cinématique.

On appelle **groupe cinématiquement lié** un ensemble de solides liés par encastrement. Par conséquent, cet ensemble sera également représenté par un seul solide.

On appelle **graphe des liaisons**, une représentation plane qui permet de décrire l'agencement des liaisons entre les solides constituant le mécanisme.

On appelle **schéma cinématique** d'un mécanisme, une représentation géométrique simplifiée des pièces et des liaisons qui le constituent et qui fait apparaître clairement sa cinématique.

1.8.2 – Modélisation d'architecture

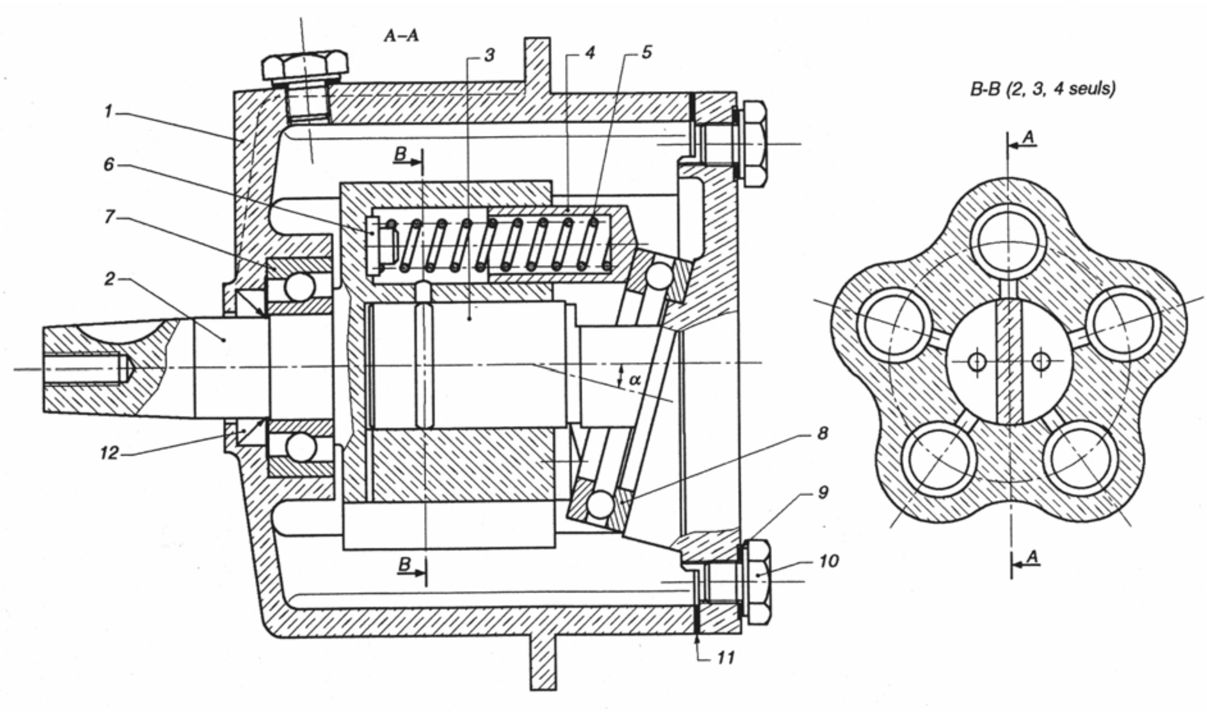
Dans le cas de la recherche des actions mécaniques s'exerçant sur un mécanisme, et notamment les actions de liaisons, il convient de s'appuyer sur un modèle respectant plus fidèlement la réalité des liaisons que ne le permet le schéma cinématique et le graphe de structure.

On appelle **groupe de solides associés**, un ensemble de pièces en liaison encastrement pour lesquelles les actions ne sont pas recherchées.

On appelle **graphe des liaisons–efforts**, une représentation plane qui permet de faire apparaître les liaisons entre les solides ainsi que les actions extérieures agissant sur le mécanisme.

On appelle **schéma d'architecture**, une représentation géométrique simplifiée des pièces et des liaisons qui le constituent ainsi qu'une représentation symbolique des actions mécaniques extérieures.

Exemple d'application
Pompe hydraulique



Déterminer les groupes cinématiquement liés, puis tracer le graphe de structure et le schéma cinématique.

Remarques générales sur les mécanismes

À partir du dessin d'ensemble ou du système réel, on regroupe les pièces mécaniques qui sont en liaison encastrement (liaison à mobilité nulle).

En examinant les surfaces de contact, et en enlevant les éléments intermédiaires comme les roulements, les ressorts,… il faut ensuite définir les liaisons entre ces solides, deux à deux, en déterminant les **mouvements relatifs** possibles.

Afin d'avoir une meilleure compréhension du mécanisme, il est possible de tracer un schéma simplifié donnant les principales fonctions réalisées par les liaisons du mécanisme. Il n'est pas nécessaire ici de visualiser toutes les liaisons du mécanisme mais seulement celles permettant de comprendre le fonctionnement.

Il faut numéroter les solides en attribuant conventionnellement le numéro 0 au bâti ou au solide de référence.

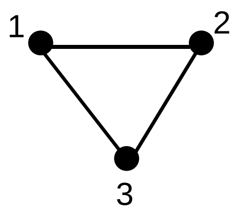
◆ ***Graphe associé à un mécanisme.***

L'utilisation du modèle de la théorie des graphes permet une mise en œuvre informatique et une compréhension plus fine des différents cas.
Le graphe associé au mécanisme est construit en associant à chacun des solides un sommet et à chacune des liaisons mécaniques un arc matérialisé par un segment de droite. Les sommets sont numérotés en correspondance avec le schéma cinématique.

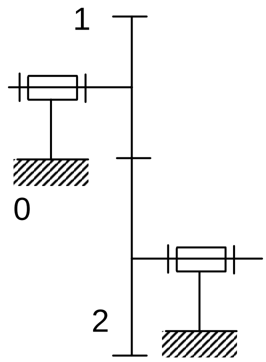
Le graphe se présente sous la forme de polygones plus ou moins imbriqués. On trouve les principales structures ci–après :

Boucle ou chaîne fermée simple ou cycle

Une boucle est un chemin du graphe qui part d'un sommet et y revient sans passer plus d'une fois par un sommet. On appelle γ le nombre de boucles indépendantes d'un graphe.



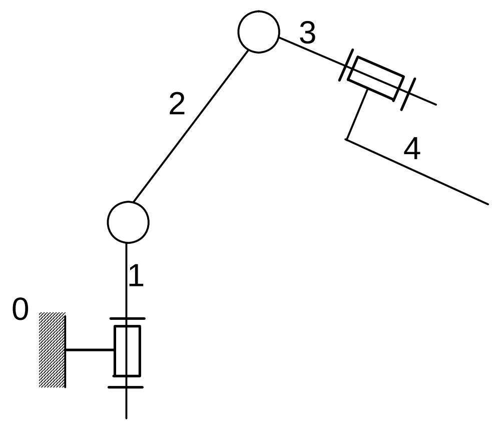
exemple : réducteur à train simple.

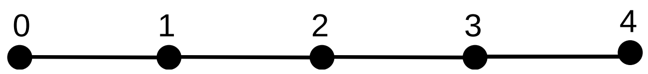


Il y a autant de solides que de liaisons.

Chaîne ouverte

Un mécanisme est dit à chaîne ouverte s'il n'existe pas de boucle. En partant du bâti, on va de solide en solide vers un solide terminal.

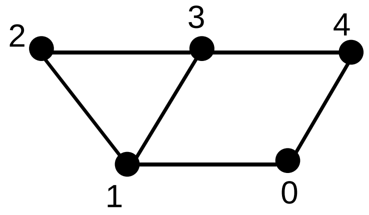


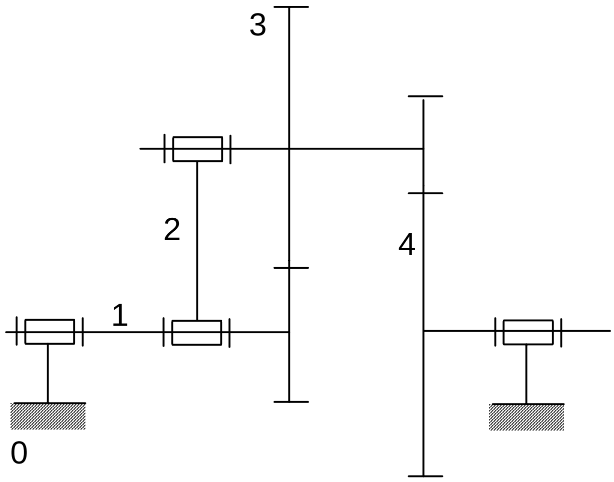


exemple : bras de robot.

Chaîne fermée complexe

Un mécanisme est dit à chaîne fermée complexe, s'il existe des boucles ayant un ou plusieurs arcs communs.





exemple : réducteur à train épicycloïdal.

Remarque : La théorie des graphes montre que le nombre de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe se calcule par la relation :

$$\boxed{\gamma = l - n + 1}$$

Dans laquelle : γ : nombre de cycles indépendants,
l : nombre de liaisons,
n : nombre de solides (y compris le bâti).

Le nombre γ permettra de déterminer le degré de mobilité[2] et le degré d'hyperstatisme[3] d'une chaîne complexe fermée.

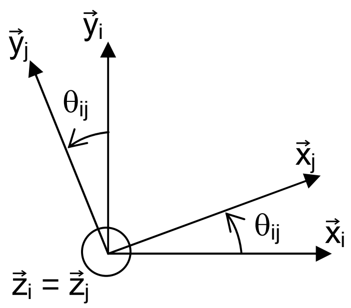
- ***Repères et paramétrage***

On attribue à chaque solide un repère de référence. Ce dernier doit tenir compte des points particuliers du solide. Les orientations des vecteurs unitaires doivent être déterminées avec soin.

Les repères doivent être mis en position, de manière unique, les uns par rapport aux autres.

On installe un paramétrage de longueurs et d'angles, qui doit rendre compte de façon biunivoque de la configuration du mécanisme.

Il est utile d'établir des schémas de passage d'un repère à l'autre.



Remarque : les schémas font apparaître des angles petits (inférieurs à 30°) et positifs, afin de ne pas se tromper dans les signes et d'avoir un cosinus plus grand que le sinus. De plus, le vecteur perpendiculaire au plan sera dirigé vers l'avant.

[2] Termes définis dans la suite du cours
[3]

◆ **Caractérisation des liaisons**

On établira, pour chaque liaison, le torseur cinématique associé, relativement au paramétrage effectué. Ce torseur sera exprimé en un point où sa forme est simple. Chaque liaison introduira n_c inconnues cinématiques indépendantes (son degré de mobilité). On notera N_c le nombre total de paramètres indépendants du mécanisme.

◆ ***Résolution***

Elle sera envisagée dans la suite du cours.

Charles Augustin Coulomb

Le saviez-vous ? Voici un principe élémentaire de cryptographie :

A veut envoyer un nombre *N* caché aux autres à *B*. Il choisit *p*, un nombre premier et envoie $N \times p$ à *B*. *B* choisit *q*, un nombre premier et envoie $N \times p \times q$ à *A*. *A* divise $N \times p \times q$ par *p* et envoie $N \times q$ à *B* qui le divise par *q* et obtient *N*.