



Modélisation des actions mécaniques

Statique des solides indéformables

Puissance et rendement

1 – Les actions mécaniques

1.1 – Définition

On appelle action mécanique toute cause susceptible de :

- ▶ modifier le mouvement d'un solide,
- ▶ maintenir un corps au repos,
- ▶ déformer un corps.

1.2 – Classification

Il est possible de faire deux partitions des actions mécaniques :

- *partition 1* : les actions intérieures et les actions extérieures à un système dont on aura défini les frontières,
- *partition 2* : les actions à distance – ou de volume – et les actions de contact.

1.3 – Modélisation

On notera E un ensemble matériel (solide ou système de solides) et \bar{E} l'extérieur (au sens topologique) de E . La modélisation des actions extérieures exercées sur E est réalisée ici avec l'outil mathématique torseur et l'on notera $\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)$ ces dernières.

L'unité SI de la résultante est le newton (N). L'unité SI du moment est le newton-mètre (Nm)

On pourra ainsi appliquer toutes les propriétés des torseurs à ces actions et notamment :

1.4 – Propriétés

Soit un ensemble matériel E .

- *additivité*

Si F et G sont deux ensembles matériels disjoints ayant des actions mécaniques avec E , les actions mécaniques de l'ensemble $F + G$ sur E sont caractérisées par un torseur qui est la somme des torseurs caractérisant les actions individuelles de F et G sur E .

« L'objectif est clair : réveiller la créativité et la réactivité de l'étudiant, l'obliger à décider, à tester, à interpréter ses échecs et ses réussites, bref, à développer une intelligence du réel. »

Robert Germinet

¹ Une application pratique de la loi du levier – comment transporter un poulet volé.

$$\mathcal{T}(F + G \rightarrow E) = \mathcal{T}(F \rightarrow E) + \mathcal{T}(G \rightarrow E)$$

- *partition*

Soit une partition de E en E_1 et E_2 . Les actions mécaniques de tout ensemble F sur E sont représentables par la somme des actions mécaniques de F sur E_1 et des actions mécaniques de F sur E_2 .

$$\mathcal{T}(F \rightarrow E) = \mathcal{T}(F \rightarrow E_1) + \mathcal{T}(F \rightarrow E_2)$$

On en déduit que le tenseur $\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)$ est indépendant de la partition faite sur E .

- *conséquence*

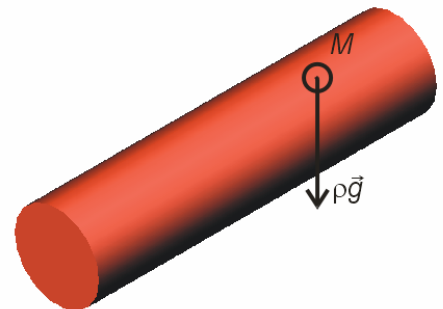
Il est possible de scinder un ensemble matériel E en plusieurs parties et de scinder également l'ensemble \bar{E} en plusieurs parties. On détermine alors les actions mécaniques des unes sur les autres, sans ordre prédéfini et on peut en effectuer les sommes.

1.5 – Modèles local et global des actions mécaniques

Les actions mécaniques s'exercent en des points du solide. Le modèle local se représente à l'aide d'un vecteur appliqué au point M où s'exerce l'action.

- Pour les *actions de volume*, on considèrera le point M centre d'une sphère de dimension infinitésimale sur lequel s'exerce la force. On notera $\vec{f}(M)$ le vecteur représentatif de la densité volumique d'effort dont l'unité SI est le Nm^{-3} . On aura $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dV}$.

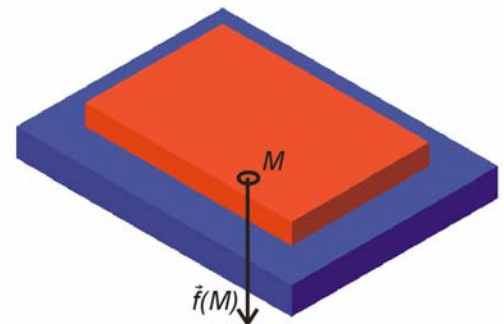
Par exemple, dans le cas de l'action exercée par la pesanteur, la densité volumique d'effort au point M du solide indéformable sera $\vec{f}(M) = \rho \vec{g}$ dans laquelle \vec{g} représente l'accélération de la pesanteur.



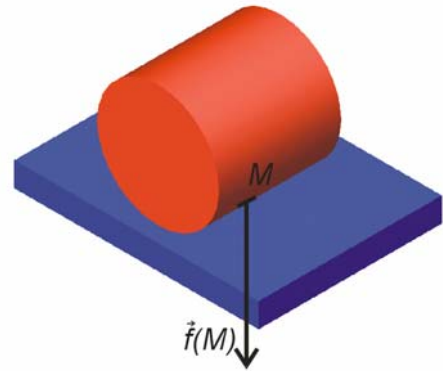
- Pour les *actions de contact surfacique*, on considèrera le point M centre d'un disque de dimension infinitésimale sur lequel s'exerce la force de contact. On notera $\vec{f}(M)$ le vecteur représentatif de la densité surfacique d'effort dont l'unité SI est le Nm^{-2} . On aura $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dS}$. Sur l'exemple ci-

contre, $\vec{f}(M)$ représente l'action exercée par le plan

supérieur sur le plan inférieur au point M du contact plan. Si les seules actions considérées sont l'action de la pesanteur sur le plan supérieur et l'action de contact surfacique, alors $\vec{f}(M) = \rho e \vec{g}$ où e est l'épaisseur de la plaque supérieure.



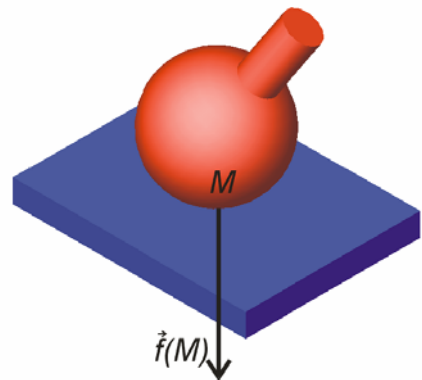
▪ Pour les *actions de contact linéique*, on considèrera le point M centre d'un segment de dimension infinitésimale sur lequel s'exerce la force de contact. On notera $\vec{f}(M)$ le vecteur représentatif de la densité linéique d'effort dont l'unité SI est le Nm. On aura $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dl}$. Sur l'exemple ci-



contre, $\vec{f}(M)$ représente l'action exercée par le cylindre sur le plan au point M du contact linéique.

Si les seules actions considérées sont l'action de la pesanteur sur le cylindre et l'action de contact linéique, alors $\vec{f}(M) = \rho\pi r^2\vec{g}$ où r est le rayon du cylindre.

▪ Pour les *actions de contact ponctuelle*, on considèrera le point M sur lequel s'exerce la force de contact. On notera $\vec{f}(M)$ le vecteur représentatif de l'effort dont l'unité SI est le N. Sur l'exemple ci-contre, $\vec{f}(M)$ représente l'action exercée par la sphère sur le plan au point M du contact ponctuel. Si les seules actions considérées sont l'action de la pesanteur sur la sphère et l'action de contact ponctuel, alors $\vec{f}(M) = m\vec{g}$ où m est la masse de la sphère.



On peut calculer le moment de l'action mécanique locale en tout point de l'espace. Si l'on considère maintenant le domaine global sur lequel s'exerce l'action mécanique – le volume pour l'action de la pesanteur, par exemple –, la représentation idoine de l'action mécanique totale est le torseur modélisant la « somme » de toutes les actions locales du domaine considéré. Si l'on note $d\Omega$ ce domaine – qui est un élément dV pour une action volumique, dS pour une action surfacique et dl pour une action linéique –, le torseur d'action mécanique globale s'écrit en un point A de l'espace

$$\mathcal{T}(\vec{f}(M)) = \begin{cases} \int_{M \in E} \vec{f}(M) d\Omega \\ \int_A \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M) d\Omega \end{cases}$$

E représentant le domaine total sur lequel s'exerce l'action.

Par exemple le champ de pesanteur $\vec{f}(M) = \rho\vec{g}$ permet de définir le torseur à structure de l'action de la terre sur un corps solide homogène E .

Si A est le centre d'inertie du solide, le moment de ce torseur est nul.

$$\mathcal{T}(\vec{f}(M)) = \begin{cases} \vec{P}(\text{Terre} \rightarrow E) = \int_E \rho \vec{g} dV \\ \vec{M}(A, \text{Terre} \rightarrow E) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M) dV \end{cases}$$

1.6 – Système d'actions mécaniques

Un système d'actions mécaniques est l'ensemble des actions mécaniques s'exerçant sur un ensemble matériel. **Tout système d'actions mécaniques peut se réduire à un torseur unique**, qui est la somme des torseurs associés à chacune des actions mécaniques.

Remarque : il faut prendre garde à exprimer tous les torseurs au même point avant d'en effectuer la somme.

1.7 – Centre d'inertie d'un solide. Théorèmes de Guldin

Soit un point A de l'espace. Le centre d'inertie d'un système matériel E , de masse m , est le point G défini par

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_E \overrightarrow{AP} dm$$

Les propriétés du centre d'inertie sont :

- Le point G vérifie $\int_E \overrightarrow{GP} dm = 0$;
- Le point G est unique ;
- Si l'on considère une partition de $E(m, G)$ en n éléments $E_j(m_j, G_j)$, alors on a

$$\int_E \overrightarrow{AP} dm = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \overrightarrow{AP} dm$$

c'est-à-dire

$$m \overrightarrow{AG} = \sum_{j=1}^n m_j \overrightarrow{AG}_j$$

ou encore

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \overrightarrow{AG}_j$$

Le point G est le barycentre de $\{(G_j, m_j)\}$;

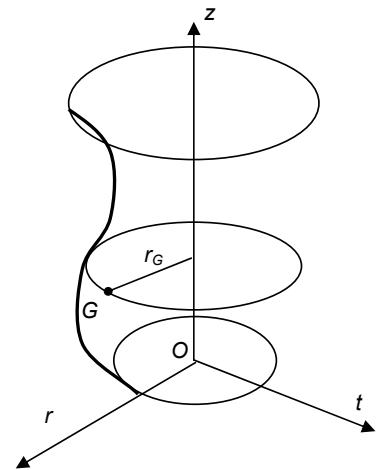
- On dit qu'il y a symétrie matérielle, s'il y a simultanément symétrie géométrique et symétrie de répartition de la masse volumique. Si E admet un élément de symétrie matérielle – plan, axe, centre – alors son centre d'inertie appartient à cet élément.

Remarquons que les modeleurs volumiques permettent la détermination de la position des centres d'inertie par intégration numérique.

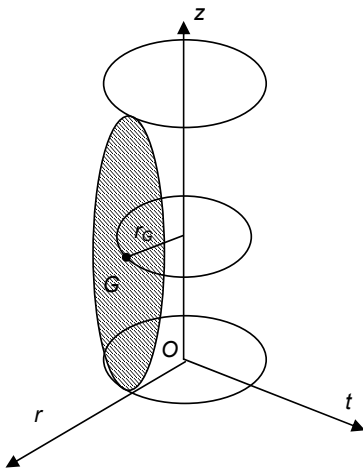
Premier théorème de Guldin

L'aire d'une surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$S = 2\pi L r_G$$



Second théorème de Guldin



Le volume d'un solide engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi S r_G$$

Remarques : ces théorèmes sont très utiles en pratique pour déterminer des longueurs de courbes, des aires de surfaces, des volumes de solides ou les centres d'inertie de courbes et de surfaces. Les théorèmes de Guldin ne permettent pas de déterminer les centres d'inertie des solides volumiques.

1.8 – Modélisation des actions de contact entre les solides

1.8.1 – Modélisation de la surface de contact entre solides

On modélise pratiquement le contact entre deux surfaces par l'aire commune où elles semblent en contact ; or, on sait que le contact réel se fait seulement au sommet des aspérités réelles qui ne représentent qu'une faible partie du modèle choisi.

Cependant, on choisira parmi les modèles proposés ci-après pour appréhender tout contact entre solides réels :

♦ le modèle des « grandes surfaces de contact »

- de type plan sur plan, modélisé par une portion de plan,
- de type emboîtement cylindrique à faible jeu, modélisé par une portion de surface cylindrique,
- de type emboîtement sphérique à faible jeu, modélisé par une portion de surface sphérique.

♦ le modèle des « petites surfaces de contact » :

• **Modèle 1** : les solides en contact sont indéformables

- de type sphère sur plan ou sphère sur sphère, modélisé par un contact ponctuel ;

– de type cylindre sur plan ou cylindre sur cylindre, modélisé par un contact linéique ;
 – de type emboîtements cylindrique ou sphérique sans jeu, modélisé par des cylindres ou des sphères.

• **Modèle 2** : un solide est indéformable, l'autre est déformable

– de type plan sur sphère, modélisé par un disque ;
 – de type plan sur cylindre, modélisé par un rectangle,
 – de type sphère sur plan, modélisé par une portion de sphère ;
 – de type cylindre sur plan, modélisé par une portion de cylindre ;
 – de type solides limités par des surfaces quelconques, modélisé par une surface de forme quelconque.

• **Modèle 3** : les deux solides sont déformables

– de type modèle de Hertz, non au programme.

1.8.2 – Modélisation des actions de contact entre deux solides

Il est possible de modéliser les actions de contact entre deux solides de deux manières suivant le point de vue adopté. On distinguera ainsi :

♦ *le modèle local*, qui s'intéresse aux actions en tout point de la surface de contact entre les deux solides,

♦ *le modèle global*, qui propose un regard sur l'action mécanique globale exercée lors du contact entre les deux solides. On ne s'intéresse pas ici à l'action en chaque point de l'aire de contact, mais à son caractère global que l'on écrira mathématiquement à l'aide du formalisme des torseurs réduit en un point de l'espace. Il traduit la « somme » des actions locales exercées en chaque point de l'aire de contact entre les solides.

Exemple de modélisation : l'action de l'eau retenue sur un barrage se modélise :

▪ *localement* par un vecteur $- p\vec{n}$ en tout point M de la surface du barrage de normale extérieure \vec{n} où il y a de l'eau.

▪ *globalement* par un torseur \mathcal{T} réduit en un point dont la résultante est la somme des actions locales et le moment au point de réduction est la somme des moments des actions locales $- p\vec{n}$.

♦ modèle local des actions de contact : action en M du solide S_2 sur le solide S_1 .

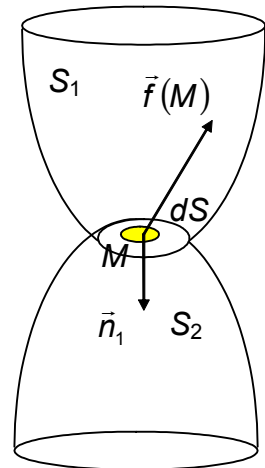
glisseur passant par M :
$$\boxed{d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) dS}$$

Remarque : $\vec{f}(M)$ est **toujours** dirigé vers la matière du solide étudié.

- ♦ modèle global des actions de contact : action du solide S_2 sur le solide S_1 .

Torseur des actions exercées par S_2 sur S_1 :

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{f}(M) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{f}(M) dS \end{cases}$$



1.8.2.1 – Le contact est sans frottement

le modèle prend alors la forme ci-après :

- ♦ modèle local : $d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) dS = -p(M)\vec{n}_1(M) dS$

avec \vec{n}_1 normale extérieure à S_1 .

- ♦ modèle global : $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S -p(M)\vec{n}_1(M) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{QM} \wedge (-p(M)\vec{n}_1(M)) dS \end{cases}$

1.8.2.2 – Le modèle prend en compte les phénomènes de frottement de glissement

Le modèle prend maintenant la forme suivante :

- ♦ modèle local : $d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) dS = (-p_n(M)\vec{n}_1(M) + p_t(M)\vec{t}(M)) dS$

- ♦ modèle global : $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S (-p_n(M)\vec{n}_1(M) + p_t(M)\vec{t}(M)) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{QM} \wedge (-p_n(M)\vec{n}_1(M) + p_t(M)\vec{t}(M)) dS \end{cases}$

Pour connaître complètement ce torseur avec frottement, il faut envisager une modélisation supplémentaire permettant de relier les pressions normales et tangentielles dues au frottement. Le modèle le plus simple utilisé en mécanique se représente grâce aux lois d'Amontons et Coulomb du frottement.

Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

1 – cas où $\vec{V}(M \in 1/2) \neq 0$: il y a glissement, et

♦ $\vec{t}(M)$ est opposé à $\vec{V}(M \in 1/2)$: $\begin{cases} \vec{t}(M) \wedge \vec{V}(M \in 1/2) = 0 \\ \vec{t}(M) \cdot \vec{V}(M \in 1/2) < 0 \end{cases}$;

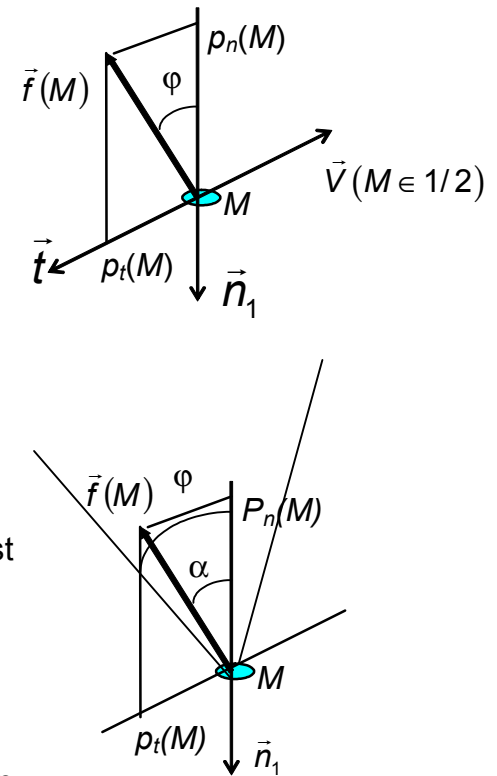
♦ $p_t(M)$ est tel que : $\frac{p_t(M)}{p_n(M)} = f = \tan \varphi$, φ est l'angle de frottement. f est appelé facteur de frottement entre S_1 et S_2 .

2 – cas où $\vec{V}(M \in 1/2) = 0$: il y a adhérence, et

♦ $p_t(M)$ est tel que : $\frac{p_t(M)}{p_n(M)} = \tan \alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq \varphi'$, φ' est l'angle d'adhérence ; on notera f' le facteur d'adhérence.

♦ $\alpha = \varphi'$ à la limite de l'équilibre,

♦ $\vec{t}(M)$ appartient au plan tangent en M à 1 et 2 ; sa direction est a priori inconnue.



On aura, pour la plupart des matériaux : $\varphi < \varphi'$.

Dans ces conditions, le modèle global avec frottement s'écrit :

$$T(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S p_n(M)(-\vec{n}_1(M) + \vec{f}(M))dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{QM} \wedge (p_n(M)(-\vec{n}_1(M) + \vec{f}(M)))dS \end{cases}$$

Le tableau ci-après, donne des valeurs des facteurs d'adhérence et de frottement pour certains couples de matériaux courants. Ces valeurs ne sont constantes que sous des pressions n'engendrant pas de déformations plastiques au niveau des surfaces en contact.

Lois de Coulomb pour les frottements de pivotement et de roulement

Si l'on considère maintenant le modèle global des actions mécaniques de contact, il est possible d'énoncer des lois de frottement similaire au modèle local dans le cas du glissement pour la résultante du torseur des actions de contact. Il est également possible d'énoncer des résultats similaires pour le moment résultant.

De même, on pourra énoncer des lois de Coulomb pour les frottements de pivotement et de roulement lors de la prise en compte des effets du moment du torseur résultant modélisant les actions mécaniques globales.

Notons $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = N\vec{n}_1 + \vec{T}\vec{t} \\ \vec{M}(I, 2 \rightarrow 1) = M_n\vec{n}_1 + \vec{M}_t \end{cases}$ le torseur des actions mécaniques de liaison

de 2 sur 1 en un point I de la surface de contact. Notons également $\vec{\omega}(1/2) = \omega_p\vec{n}_1 + \vec{\omega}_r$ le vecteur taux de rotation du solide 1 par rapport au solide 2. On rappelle que $\omega_p\vec{n}_1$ est le vecteur taux de pivotement et $\vec{\omega}_r$ le vecteur taux de roulement (dans le plan tangent).

1 – cas où $\omega_p\vec{n}_1 \neq 0$: il y a pivotement, et

- ♦ \vec{M}_n est opposé à $\omega_p\vec{n}_1$:
$$\begin{cases} \vec{M}_n \wedge \omega_p\vec{n}_1 = 0 \\ \vec{M}_n \cdot \omega_p\vec{n}_1 < 0 \end{cases} ;$$

- ♦ on a $\frac{\|\vec{M}_n\|}{|N|} = k$, k est le facteur de frottement de pivotement entre S_1 et S_2 .

2 – cas où $\omega_p\vec{n}_1 = 0$: il y a adhérence au pivotement, et

- ♦ $\frac{\|\vec{M}_n\|}{|N|} \leq k'$, k' est le facteur d'adhérence au pivotement entre S_1 et S_2 .

- ♦ $k = k'$ à la limite de l'équilibre,

3 – cas où $\vec{\omega}_r \neq 0$: il y a roulement, et

- ♦ \vec{M}_t est opposé à $\vec{\omega}_r$:
$$\begin{cases} \vec{M}_t \wedge \vec{\omega}_r = 0 \\ \vec{M}_t \cdot \vec{\omega}_r < 0 \end{cases} ;$$

- ♦ on a $\frac{\|\vec{M}_t\|}{|N|} = h$, h est le facteur de frottement de roulement entre S_1 et S_2 .

4 – cas où $\vec{\omega}_r = 0$: il y a adhérence au roulement, et

- ♦ $\frac{\|\vec{M}_t\|}{|N|} \leq h'$, h' est le facteur d'adhérence au roulement entre S_1 et S_2 .

- ♦ $h = h'$ à la limite de l'équilibre,

Remarques

- les facteurs de frottement de glissement et d'adhérence sont sans dimension ;
- les facteurs de frottement de pivotement, de roulement, d'adhérence au pivotement et d'adhérence au roulement a pour dimension L ;
- les facteurs de frottement de pivotement, de roulement, d'adhérence au pivotement et d'adhérence au roulement sont souvent faibles et négligeables par rapport au frottement de glissement et à l'adhérence ;
- en pratique, on confond souvent les facteurs de frottement de glissement et d'adhérence d'une part, les facteurs de frottement de pivotement et d'adhérence au

pivotement d'autre part, et enfin les facteurs de frottement de roulement et d'adhérence au roulement.

1.8.2.3 – La pression de contact entre les solides

Dans les mécanismes, la transmission des actions mécaniques se fait par l'intermédiaire des surfaces en contact dans les liaisons entre solides. Il existe des modèles permettant l'étude de cette transmission dans les cas où le contact est étroit ou étendu. Le premier cas a été traité par Hertz au début du siècle, mais ne figure pas au programme. Le second cas, difficile à modéliser, car les surfaces théoriques en contact ne sont pas les surfaces réelles (uniquement les sommets des aspérités), est traité d'une manière approximative par des modèles réducteurs dont le plus simple que nous allons étudier est le modèle de répartition uniforme de pression.

	facteur d'adhérence		facteur de frottement	
	sec	graissé	sec	graissé
acier/acier	0,15	0,1	0,1	0,06
acier/fonte	0,2	0,1	0,16	0,06
acier/U-E	0,2	0,1	0,16	0,06
fonte/fonte	0,2	0,15		0,12
fonte/U-E		0,1	0,2	0,1
polymère/polymère	1,0		0,05	
céramique/céramique	0,5		0,05	
lubrification hydrodynamique		0,005		0,001
métaux parfaitement propres dans le vide	>5			
métaux propres dans l'air	2		0,8	
lubrification de surface des métaux		0,2		0,05
métaux sur polymères (PE, PTFE, PVC)		0,5		0,04

1.8.2.3.1 - Le modèle de répartition uniforme des pressions

Ce modèle suppose que la répartition de la pression de contact est uniforme sur toute la surface de contact.

$$p(M) = p_0 = \text{constante}$$

Cette condition impose :

- une géométrie parfaite des surfaces en contact ; les défauts sont négligés ;
- les solides sont indéformables ;
- les liaisons sont sans jeu ;
- le glisseur associé à la liaison est centré par rapport à celle-ci.

L'utilisation de ce modèle est intéressante d'un point de vue calculatoire, mais il demeure fortement éloigné de la réalité dont il ne rend pas compte correctement

1.8.2.3.2 - Le modèle de répartition fonction de la déformation (**non au programme**)

Ce modèle suppose que l'un ou les deux solides se déforment en surface et qu'il y a une relation entre la déformation $d(M)$ en un point de la surface de contact et la pression $p(M)$ en ce même point.

$$p(M) = k d(M)^a$$

dans laquelle :

- k est un coefficient lié à la rigidité des matériaux en contact ;
- a traduit le comportement des matériaux en contact :
 - $a = 1$, pour les métaux ,
 - $a > 1$, pour les matières plastiques.

Nous ne détaillerons pas plus longtemps ce modèle hors programme.

1.8.2.3.3 - La pression de matage entre solides en contact

Le critère servant à déterminer les conditions d'emploi limites des solides en contact est un critère de pression limite appelée pression de matage, valeur conventionnelle donnée par les constructeurs et les ouvrages de calculs de mécanique.

La condition limite est donc :

$$p < p_{\text{matage}}$$

Dans un mécanisme, les pressions de matage sont fortement liées aux conditions de montage et de fabrication ainsi qu'à l'isostatisme des chaînes cinématiques participants au fonctionnement du mécanisme.

1.9 – Puissance

Considérons un champ de glisseurs $\vec{p}(M)$. Supposons que les points M appartiennent à un domaine Ω , qui peut être un volume, une surface, une droite ou un point. On notera $d\Omega$ l'élément différentiel descripteur du domaine.

Supposons qu'il soit possible de déterminer dans un repère R , les vitesses de tout point M appartenant à Ω .

On appellera puissance du champ de glisseurs $\vec{p}(M)$, sur le domaine Ω relativement au repère R , le réel $P(\vec{p}, \Omega / R)$ défini par

$$P(\vec{p}, \Omega / R) = \int_{M \in \Omega} \vec{p}(M) \cdot \vec{V}(M / R) d\Omega$$

Son unité SI est le watt (W).

Dans le cas où tous les points M appartiennent à un solide S , on pourra utiliser le torseur cinématique caractérisant le mouvement de S par rapport à un repère R

$$\mathcal{V}(S/R) = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A, S/R) \end{cases}_A$$

On aura alors

$$\vec{V}(M, S / R) = \vec{V}(A, S / R) + \vec{\Omega}(S / R) \wedge \overline{AM}$$

et, en remplaçant dans l'intégrale, il vient

$$P(\vec{p}, \Omega / R) = \int_{M \in \Omega} \vec{p}(M) \cdot \vec{V}(A, S / R) d\Omega + \int_{M \in \Omega} \vec{p}(M) \cdot (\vec{\Omega}(S / R) \wedge \overline{AM}) d\Omega$$

En utilisant les propriétés du produit mixte et en factorisant les quantités indépendantes de M , on obtient

$$P(\vec{p}, \Omega / R) = \vec{V}(A, S / R) \cdot \int_{M \in \Omega} \vec{p}(M) d\Omega + \vec{\Omega}(S / R) \cdot \int_{M \in \Omega} \overline{AM} \wedge \vec{p}(M) d\Omega$$

Mais on peut associer au champ de glisseurs $\vec{p}(M)$ le torseur

$$\mathcal{T}(p \rightarrow S) = \begin{cases} \int_{M \in \Omega} \vec{p}(M) d\Omega \\ \int_A \overline{AM} \wedge \vec{p}(M) d\Omega \end{cases}$$

Et l'on peut en déduire le résultat important, dans le cas du solide

$$\boxed{P(\vec{p}, S / R) = \mathcal{T}(p \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S / R)}$$

1.10 – Puissance des interefforts dans une liaison. Liaison parfaite

Considérons une liaison entre deux solides 1 et 2. On appelle puissance des interefforts ou des efforts réciproques le réel $P(1 \leftrightarrow 2)$ tel que

$$P(1 \leftrightarrow 2 / R) = P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \rightarrow 2 / R) + P(2 \rightarrow 1 / R)$$

Remarquons que cette puissance **ne dépend pas du repère** R . En effet, si R_1 et R_2 sont deux référentiels galiléens, on a

$$\begin{aligned} P(1 \leftrightarrow 2 / R_1) &= P(1 \rightarrow 2 / R_1) + P(2 \rightarrow 1 / R_1) \\ P(1 \leftrightarrow 2 / R_2) &= P(1 \rightarrow 2 / R_2) + P(2 \rightarrow 1 / R_2) \end{aligned}$$

en soustrayant la seconde équation de la première, il vient

$$P(1 \leftrightarrow 2 / R_1) - P(1 \leftrightarrow 2 / R_2) = \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2 / R_1) + \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1 / R_1) - \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2 / R_2) - \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1 / R_2)$$

en utilisant le PAR, on obtient

$$P(1 \leftrightarrow 2 / R_1) - P(1 \leftrightarrow 2 / R_2) = \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(R_2 / R_1) - \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(R_2 / R_1) = 0$$

Définition : On dit qu'une liaison entre deux solides 1 et 2 est parfaite si la puissance des interefforts $P(1 \leftrightarrow 2)$ est nulle pour tout t .

1.11 – Travail

La puissance étant connue à tout instant, on calcule le travail relatif au champ $\vec{p}(M)$ sur le domaine Ω en mouvement par rapport au repère R , entre les instant t_0 et t_1 , par l'intégrale

$$W(\vec{p}, \Omega / R) = \int_{t_0}^{t_1} P(\vec{p}, \Omega / R) dt$$

Son unité SI est le joule (J).

1.12 – Puissance dissipée, rendement

Le concept de liaison parfaite se traduit par le fait que la puissance des interefforts de la liaison est nulle. Dans la réalité, il existe toujours une dégradation de l'énergie se traduisant par des pertes, notamment par frottement. Par exemple dans une liaison pivot, il existe un couple de frottement parasite s'opposant à la rotation relative entre les deux solides en liaison.

Si l'on considère un mécanisme passif, la puissance à la sortie de celui-ci est dans la réalité différente de la puissance à son entrée : il y a des pertes d'énergie.

On aura : puissance de sortie = puissance d'entrée + puissance perdue.

Le rendement de ce mécanisme passif sera alors $\eta = \frac{\text{Puissance de sortie}}{\text{Puissance d'entrée}}$. Le rendement vaut 1 pour un mécanisme parfait.

Remarque : il faut parfaitement définir la frontière du système étudié, afin de bien appréhender le rendement de celui-ci.

2 - Le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

2.1 – Enoncé

Pour qu'un solide S soit en mouvement uniforme ou au repos dans un référentiel galiléen, il faut et il suffit que le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à S soit nul. On note

$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = 0$$

Remarque : on pourra étendre ce principe pour un solide de masse supposée nulle en mouvement quelconque (les forces d'inertie sont alors nulles).

2.2 – Solide en équilibre statique sous l'action de deux glisseurs

Soit deux points A et B d'un solide S en équilibre statique sous l'action de deux glisseurs passant respectivement par A et par B . On a

$$\mathcal{T}_1(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{T}_2(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Le torseur résultant de la somme des actions mécaniques exprimé en A vaut

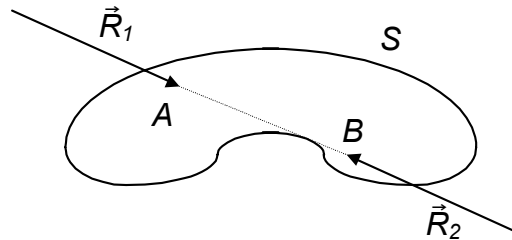
$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = \mathcal{T}_1(\bar{S} \rightarrow S) + \mathcal{T}_2(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 \end{Bmatrix}}$$

En appliquant le PFS à S, on obtient

$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 \end{Bmatrix}} = 0$$

qui donne

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 &= 0 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 &= 0 \end{aligned}$$



et donc \vec{R}_1 et \vec{R}_2 ont même direction, même norme et sont opposés. De plus, ils sont colinéaires à \overrightarrow{AB} .

2.3 – Solide en équilibre sous l'action de trois glisseurs

Soit trois points A, B et C d'un solide S en équilibre statique sous l'action de deux glisseurs passant respectivement par A par B et par C. On a

$$\mathcal{T}_1(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{T}_2(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{T}_3(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Le torseur résultant de la somme des actions mécaniques exprimé en A vaut

$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = \mathcal{T}_1(\bar{S} \rightarrow S) + \mathcal{T}_2(\bar{S} \rightarrow S) + \mathcal{T}_3(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_3 \end{Bmatrix}}$$

En appliquant le PFS à S, on obtient

$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_3 \end{Bmatrix}} = 0$$

qui donne

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 &= 0 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Posons : $\vec{K} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2$. Ce vecteur est perpendiculaire à \overrightarrow{AB} et \vec{R}_2 . La seconde équation donne : $\vec{K} = -\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_3$, c'est-à-dire \vec{K} perpendiculaire à \vec{R}_3 et \overrightarrow{AC} .

Les vecteurs $\vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{AB}$ et \vec{AC} sont tous perpendiculaires à \vec{K} et donc coplanaires. Il en est de même de \vec{R}_1 d'après l'équation de la résultante. On peut donc énoncer :

$$\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3 \text{ sont dans le plan } ABC$$

Si, dans le plan ABC , on appelle I le point d'intersection des supports de glisseurs \vec{R}_1 , et \vec{R}_2 , leur moment par rapport à I est nul. Pour respecter le PFS, il en est nécessairement de même pour \vec{R}_3 , dont le support passe par I . D'où :

$$\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3 \text{ concourants.}$$

Remarque : le point I peut être rejeté à l'infini, et $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ sont coplanaires et colinéaires.

2.4 – Problème plan

On dit qu'un problème est un problème plan, lorsque la géométrie peut être assimilée à une géométrie plane et que les actions mécaniques sont situées dans le même plan que la géométrie du problème.

3 - Le Principe des Actions Réciproques (PAR)

3.1 – Énoncé

Soit deux solides 1 et 2 en contact. Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide 1 sur le solide 2 est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par le solide 2 sur le solide 1.

On note :
$$\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = -\mathcal{T}(1 \rightarrow 2).$$

3.2 – Conséquences

Supposons que les solides 1 et 2 soient en équilibre. On a ainsi

$$\mathcal{T}(\bar{1} \rightarrow 1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(\bar{2} \rightarrow 2) = 0$$

Les actions extérieures à 1 sont constituées des actions extérieures à l'ensemble 1 + 2 et de l'action de 2 sur 1. On a alors

$$\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1) + \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = 0$$

De même pour le solide 2

$$\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 2) + \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = 0$$

En effectuant la somme de ces deux équations, il vient

$$\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1) + \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) + \mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 2) + \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = 0$$

Or, d'après la propriété de partition

$$\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1) + \mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 2) = \mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1+2)$$

D'où,

$$\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1+2) + \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) + \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = 0$$

Enfin, d'après le PAR $\mathcal{T}(\overline{1+2} \rightarrow 1+2) = 0$

On en déduit que l'ensemble des solides 1+2 est en équilibre.

4 - Equilibre d'un ensemble de solides

4.1 – Hypothèse et théorème

Soit un ensemble E constitué de n solides notés 1, 2, 3,..., n , chacun en équilibre statique.

Pour qu'un ensemble E de n solides soit en équilibre statique dans un repère galiléen, il faut et il suffit que tout sous ensemble F de p solides soit en équilibre statique (c'est-à-dire que le torseur des actions mécaniques extérieures à F soit nul).

4.2 – Démonstration

On notera : $\mathcal{T}(\bar{F} \rightarrow i)$ le torseur des actions extérieures à F s'exerçant sur le solide i .

$$\sum_{j=1}^p \mathcal{T}(j \rightarrow i) \text{ le torseur des actions extérieures des autres solides de } F$$

sur i . On aura évidemment : $\mathcal{T}(i \rightarrow i) = 0$.

Appliquons le PFS au solide i : $\mathcal{T}(\bar{F} \rightarrow i) + \sum_{j=1}^p \mathcal{T}(j \rightarrow i) = 0$

Effectuons la somme de toutes ces relations pour les p solides de F . Il vient :

$$\sum_{i=1}^p \mathcal{T}(\bar{F} \rightarrow i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathcal{T}(j \rightarrow i) = 0$$

La double sommation du second terme peut être associée en termes : $\mathcal{T}(i \rightarrow j) + \mathcal{T}(j \rightarrow i)$ dont la somme est nulle d'après le PAR entre les solides i et j .

On en tire : $\sum_{i=1}^p \mathcal{T}(\bar{F} \rightarrow i) = \mathcal{T}(\bar{F} \rightarrow F) = 0$. CQFD

5 - Le torseur des actions de la pesanteur

5.1 – Masse et poids

On appelle masse d'un corps , le scalaire associé à tout ensemble de point matériel de tel que si $\rho(M)$ est la masse volumique du solide au point M , on ait :

$$m(\Omega) = \int_{M \in \Omega} \rho(M) d\Omega$$

Placé dans un champ de pesanteur caractérisé par un vecteur \vec{g} , le poids d'un point matériel M de masse m , est une action à distance caractérisée par un glisseur passant par M tel que :

$$\vec{p}(M) = m\vec{g}$$

5.2 – Cas d'un ensemble matériel

En tout point M , de masse dm , d'un ensemble matériel E s'exerce une action de pesanteur élémentaire caractérisée par un glisseur passant par M :

$$d\vec{p}(M) = \vec{g}dm$$

C'est un champ de glisseurs auquel on peut associer, en tout point A , le torseur :

$$\mathcal{T}(p \rightarrow E) = \begin{cases} \vec{R} = \int_{M \in E} d\vec{p}(M) \\ \vec{M}(A) = \int_{M \in E} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{p}(M) \end{cases}$$

Dans la zone concerné, \vec{g} est constant, par conséquent :

$$\int_{M \in E} d\vec{p}(M) = \vec{g} \int_{M \in E} dm = \vec{g}m(E) \qquad \int_{M \in E} d\vec{p}(M) = \left(\int_{M \in E} \overrightarrow{AM} dm \right) \wedge \vec{g}$$

En appelant G le centre d'inertie de E , on a : $\int_{M \in E} \overrightarrow{AM} dm = m(E) \overrightarrow{AG}$

Cette dernière quantité est nulle pour $A = G$. Le torseur associé aux actions de pesanteur s'écrit donc :

$$\mathcal{T}(p \rightarrow E) = \begin{cases} m(E)\vec{g} \\ 0 \end{cases}_G$$

5.3 – Cas du solide

Dans le cas du solide, la puissance associée aux actions de pesanteur s'obtient en calculant le comoment de ce torseur avec le torseur cinématique du mouvement du solide S par rapport au repère R . En effectuant le calcul au point G , cette puissance s'écrit :

$$P(p, S / R) = m(S) \vec{g} \cdot \vec{V}(G, S / R)$$

Par suite le travail développé par les actions de pesanteur est défini, entre les instants t_0 et t_1 , par :

$$W(p, S / R) = \int_{t_0}^{t_1} P(p, S / R) dt = \int_{t_0}^{t_1} m(S) \vec{g} \cdot \vec{V}(G, S / R) dt$$

En factorisant les quantités constantes et en notant $V_g(G, S / R)$ la projection de $\vec{V}(G, S / R)$ sur l'axe la direction du vecteur \vec{g} , on obtient :

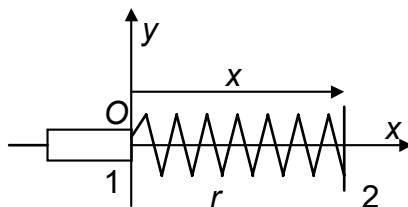
$$W(p, S / R) = m(S) g \int_{t_0}^{t_1} V_g(G, S / R) dt$$

En notant h la cote du point H , projection du centre d'inertie G sur l'axe portant \vec{g} , on obtient :

$$W(p, S / R) = m(S) g (h_1 - h_0).$$

6 - Les corps déformables utiles en mécanique des solides indéformables

6.1 – Le ressort linéaire



On considère deux solides 1 et 2 liés par une liaison glissière d'axe Ox . Entre les faces, on pose : $O\vec{A} = x\vec{x}$

Le ressort r est un dispositif de masse négligeable devant les actions mécaniques mises en jeu. Il est caractérisé par :

- une position où il ne produit pas d'action mécanique x_0 ,
- une raideur k , qui s'exprime en Nm^{-1} .

Le torseur associé aux actions mécaniques est

$$\mathcal{T}(1 \rightarrow r) = \begin{cases} -k(x - x_0) \vec{x} \\ 0 \end{cases}_o$$

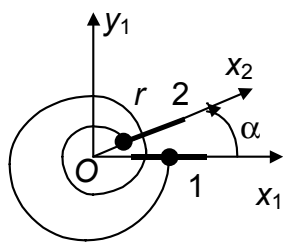
Appliquons le PFS au ressort r , on a : $\mathcal{T}(1 \rightarrow r) + \mathcal{T}(2 \rightarrow r) = 0$, ce qui donne

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow r) = \begin{cases} k(x - x_0) \vec{x} \\ 0 \end{cases}_o$$

Il est alors commode de considérer les actions mécaniques de 1 + r sur 2, en insistant sur la définition de x , qui fixe la position de 2 par rapport à 1

$$\mathcal{T}(1+r \rightarrow 2) = \begin{cases} -k(x - x_0)\vec{x} \\ 0 \end{cases}$$

6.2 – Le ressort spirale



On considère deux solides 1 et 2 liés par une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) . On pose

$$\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

Le ressort r est un dispositif de masse négligeable devant les actions mécaniques mises en jeu. Il est caractérisé par :

- un angle pour lequel le dispositif ne produit pas d'action mécanique α_0 .
- une raideur k , qui s'exprime en Nm.

Le torseur associé aux actions mécaniques est :

$$\mathcal{T}(1 \rightarrow r) = \begin{cases} 0 \\ -k(\alpha - \alpha_0)\vec{z} \end{cases}$$

En appliquant le PFS au ressort r , on a : $\mathcal{T}(1 \rightarrow r) + \mathcal{T}(2 \rightarrow r) = 0$

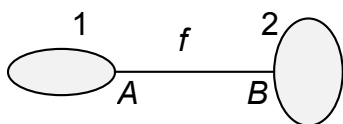
ce qui donne :

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow r) = \begin{cases} 0 \\ k(\alpha - \alpha_0)\vec{z} \end{cases}$$

Il est alors commode de considérer les actions mécaniques de 1 + r sur 2, en insistant sur la définition de α , qui fixe la position de 2 par rapport à 1 :

$$\mathcal{T}(1+r \rightarrow 2) = \begin{cases} 0 \\ -k(\alpha - \alpha_0)\vec{z} \end{cases}$$

6.3 – Les fils et les courroies



Un fil relie les solides 1 et 2, respectivement aux points A et B. Le plus souvent, on considère que les fils ou les courroies ont une masse négligeable devant les autres actions mécaniques agissantes.

On suppose de plus que le fil est :

- inextensible,
- infiniment flexible.

Les actions mécaniques doivent tendre le fil. Comme pour les solides soumis à deux glisseurs, il est souvent commode de poser :

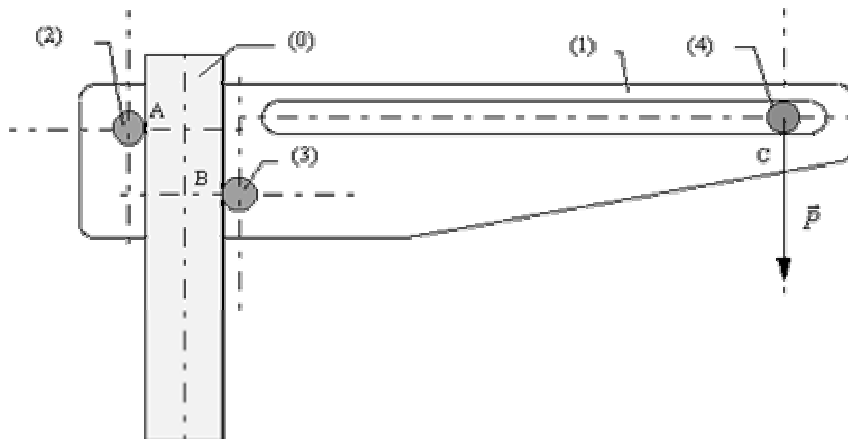
$$T(1 \rightarrow f) = \begin{cases} k \overrightarrow{AB} \\ 0 \end{cases} \quad k < 0.$$

7 - Condition d'arc-boutement, disposition de deux contacts autobloquants

On dit qu'il y a **arc-boutement** sur un solide lorsque le phénomène d'adhérence provoque une impossibilité de mouvement quelque soit l'intensité des actions mécaniques extérieures. Il y a équilibre quelques soient les intensités des efforts.

Exemple : Le dispositif ci-après est constitué d'une plaque (1) sur laquelle sont fixées deux pîges (2) et (3). Un crochet articulé sur l'axe (4) supporte une charge \vec{P} . Cet axe peut se déplacer le long de la rainure percée dans (1). Le solide (1+2+3) est en contact aux points A et B avec une tige (0).

Supposons que le solide (1+2+3) soit en équilibre sous l'action des solides (0) et (4). On supposera que les poids propres des solides sont négligeables devant les autres efforts. On connaît les facteurs de frottement en A et B : $f_A = f_B = f = 0,18$



Inventaire des actions extérieures exercées sur le solide $(P)=(1+2+3)$

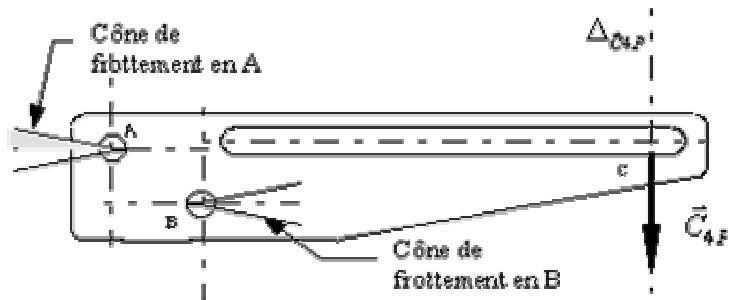
$$\text{Action de l'axe (4) en C : } T(4 \rightarrow P) = \begin{cases} \vec{P} \\ 0 \end{cases}_C$$

$$\text{Action de la tige (0) en A avec frottement : } T(0A \rightarrow P) = \begin{cases} \vec{A}_{0P} \\ 0 \end{cases}_A$$

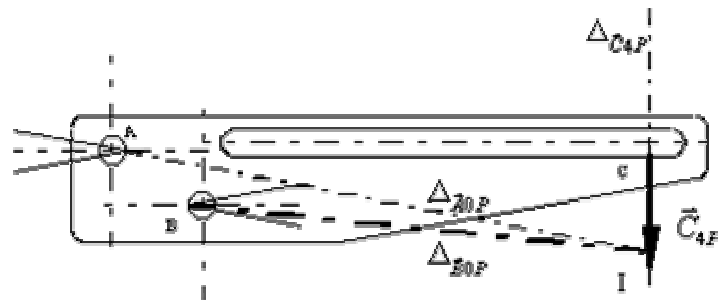
$$\text{Action de la tige (0) en B avec frottement : } T(0B \rightarrow P) = \begin{cases} \vec{B}_{0P} \\ 0 \end{cases}_B$$

Le problème comporte quatre inconnues, modules et directions de \vec{A}_{0P} et \vec{B}_{0P} et de trois équations (le système est plan) ; le système est hyperstatique de degré 1. Toutefois nous allons pouvoir malgré tout analyser son comportement.

Connaissant les facteurs de frottement en A et B , nous connaissons les angles de frottement en A et B . Les actions \vec{A}_{0P} et \vec{B}_{0P} sont toujours contenues dans les cônes de frottement. De plus, nous savons que les actions en A et B s'opposent à un éventuel mouvement. On peut donc en déduire que l'action en A se situera dans la zone grisée sur le schéma ci contre.



Supposons maintenant que l'action en A se situe sur le cône de frottement, c'est à dire qu'au point A nous nous plaçons à la limite entre l'équilibre et le mouvement. On peut alors déterminer la direction de l'action en B ; en effet le solide (P) est soumis à trois forces, elles sont donc concourantes en un point I . On recherche le point de concours de $\Delta_{\vec{A}_{0P}}$ et de $\Delta_{\vec{C}_{4F}}$, on en déduit le point I et donc la direction $\Delta_{\vec{B}_{0P}}$.



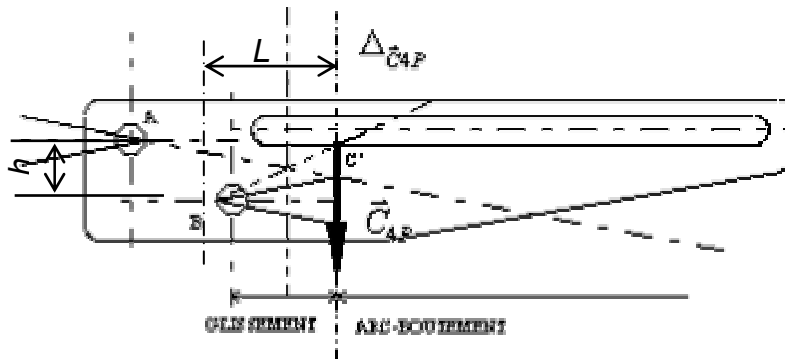
On constate que la direction de B est contenue dans le cône de frottement en B : le solide (P) est donc en équilibre. De plus cet équilibre est indépendant de la valeur du glisseur de résultante \vec{P} , c'est le **phénomène de l'arc-boutement**.

Remarques :

En réalité l'action en A se situe plus bas, autrement l'action en B ne s'opposerait pas au mouvement éventuel vers le bas.

On ne sait pas trouver exactement les positions de \vec{A}_{0P} et \vec{B}_{0P} .

Si l'on déplace la charge vers la gauche, On obtiendra l'équilibre strict pour la charge passant par le point C' et un mouvement de glissement pour toutes charges situées à gauche de C' (équilibre impossible, il faudrait que l'action en B sorte du cône de frottement ce qui est irréalisable.)



Montrer que, à la limite du glissement, l'axe central du glisseur $\mathcal{T}(4 \rightarrow P)$ se trouve à la distance $L = \frac{h}{2f}$, si h est la distance axiale entre A et B .

8 - Méthode générale d'étude des systèmes de solides

A partir d'un dessin d'ensemble ou d'un mécanisme réel, voici la suite des opérations menant rationnellement à la solution d'un problème de statique.

1 Réaliser le schéma d'architecture du système

Ce schéma d'architecture (plan ou spatial) sera obtenu après la recherche successive :

- des sous-ensembles en liaison encastrement que l'on appellera solides et que l'on numérotera.
- du graphe de structure du mécanisme.

2 Etablir les repères liés à chacun des solides et paramétrer les positions

On attribuera à chacun des solides un repère propre qui lui sera lié. Il faudra le choisir en prenant en compte les particularités du solide.

On réalisera un paramétrage de longueurs et/ou d'angles et l'on tracera les figures planes traduisant ce paramétrage.

3 Caractériser les liaisons et préciser les efforts extérieurs au mécanisme

On déterminera pour chaque liaison le torseur des actions transmissibles par celle-ci.

On précisera les torseurs représentant les actions mécaniques extérieures.

4 Définir chacun des sous-ensembles auxquels vous allez appliquer le PFS

Afin d'appliquer le PFS, il faudra définir précisément le solide ou l'ensemble de solides considérés.

Remarque : Chercher les ensembles de solides soumis à deux ou trois glisseurs que l'on sait résoudre de manière simple.

5

Résoudre le système d'équations
scalaires

Pour résoudre un problème par la statique, il faut que le nombre d'équations soit identique au nombre d'inconnues du problème. On peut vérifier l'isostatisme du problème.

Il est souvent plus facile de résoudre les équations de proche en proche plutôt que de résoudre de très grands systèmes.

Il faut pour cela isoler les sous-ensembles convenables et écrire les équations de moment en des points où les résultantes sont inconnues.



Isaac NEWTON

Le saviez-vous ? La justification de la règle du parallélogramme est due au mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700–1782). C'est René Descartes (1596–1650) qui a mis en lumière le principe d'inertie. Ce dernier est né en Indre-et-Loire dans une commune qui s'appelait La Haye et qui s'appelle aujourd'hui Descartes.