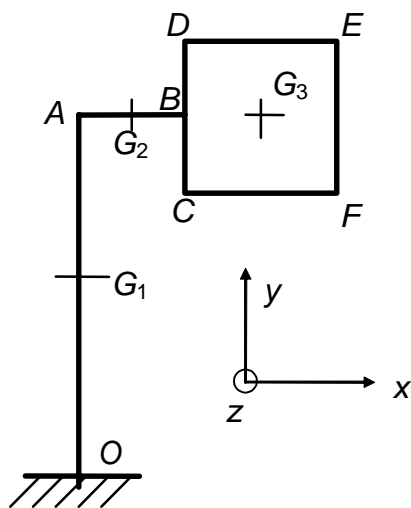


## Modélisation des actions mécaniques et statique des solides indéformables exercices

### Exercice n°1 Panneau indicateur

Un panneau indicateur – figure ci dessous – est soumis à son propre poids et à l'action du vent sur sa partie rectangulaire. Le poids linéique des montants  $OA$  et  $AB$  est  $\vec{q} = -q\vec{y}$ . Le poids du panneau  $CDEF$  est  $\vec{P} = -Mg\vec{y}$ . L'action du vent sur  $CDEF$  est représentée par une densité surfacique d'efforts  $\vec{p} = -p\vec{z}$  ( $p$  constant).

Calculer le torseur d'action mécanique en  $O$  du sol sur cette structure.



On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} OA &= 7,5 \text{ m,} \\ AB &= 3 \text{ m,} \\ DC &= 3 \text{ m,} \\ DE &= 4 \text{ m,} \\ q &= 750 \text{ Nm}^{-1}, \\ p &= 500 \text{ Nm}^{-2}, \\ Mg &= 7000 \text{ N.} \end{aligned}$$

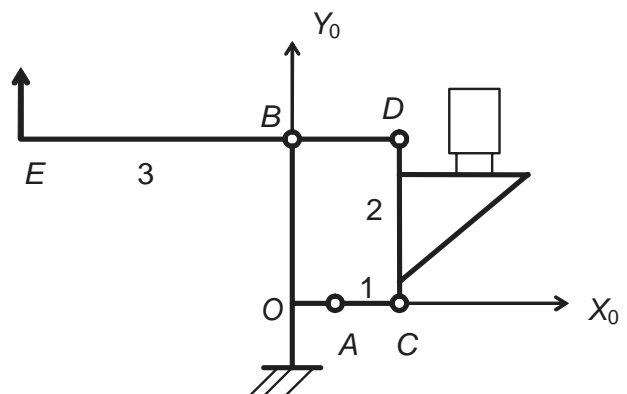
### Exercice n°2 Pèse camion

On considère un bâti 0, auquel est attaché le repère  $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On pose :

$$O\vec{A} = a\vec{x}_0 \quad O\vec{B} = b\vec{y}_0$$

Le champ de pesanteur est :

$$\vec{g} = -g\vec{y}_0$$



La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(A; \vec{z}_0)$ . On pose :

$$A\vec{C} = c\vec{x}_0.$$

Le plateau porte camion 2 est lié à la barre 1 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(C; \vec{z}_0)$ . On pose :  $C\vec{D} = b\vec{y}_0$ . Le levier 3 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(B; \vec{z}_0)$ . On pose :

$$B\vec{E} = d\vec{x}_0 \quad (d < 0).$$

Ce levier est également lié au plateau 2 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(D; \vec{z}_0)$ .

Le camion 4, de centre de masse  $G$  et de masse  $M$  inconnue, repose sur le plateau 2. On pose :  $D\vec{G} \cdot \vec{x}_0 = e$ .

L'action mécanique connue est caractérisée par :  $\mathcal{T}(e \rightarrow 3) = \begin{cases} F\vec{y} \\ 0 \end{cases}_E$ .

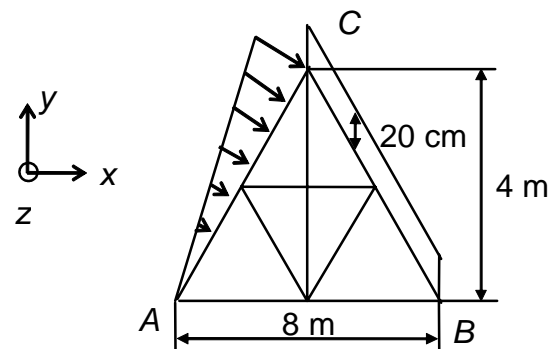
Le problème est considéré comme plan. La masse des éléments peut être négligée par rapport à celle du camion.

1 – Caractériser les liaisons.

2 – A l'équilibre statique, exprimer chaque action mécanique en fonction de  $M$ .

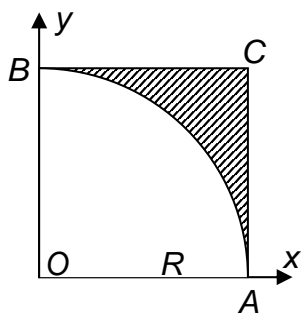
**Exercice n°3** une toiture bien sollicitée !

Une toiture est soumise à l'action du vent sur l'un de ses versants et à l'action de la neige sur l'autre. Les actions des murs sur la charpente sont telles que seuls les déplacements en  $A$  suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , et en  $B$  suivant  $\vec{y}$  soient bloqués. On négligera les effets de bord suivant  $\vec{z}$  dans cet exercice, c'est-à-dire que l'on considérera une épaisseur unité (1 m) suivant  $\vec{z}$ .

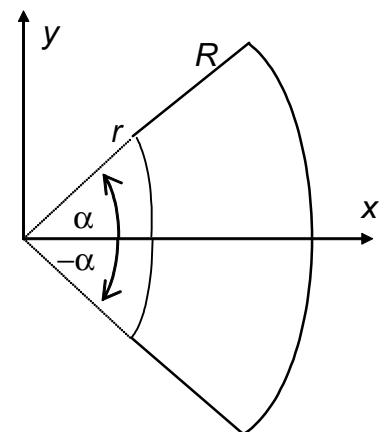


On suppose que l'épaisseur constante de la neige sur la toiture est  $e = 20$  cm, et que l'action du vent est linéaire suivant la cote de la toiture avec une valeur maximale sur la faîtière (en  $C$ ) égale à  $1 \text{ kN.m}^{-2}$  – le glisseur unitaire est orthogonal à la toiture (voir figure) –. Déterminer les actions mécaniques de la toiture sur le mur.

**Exercice n°4** Centres d'inertie<sup>1</sup>



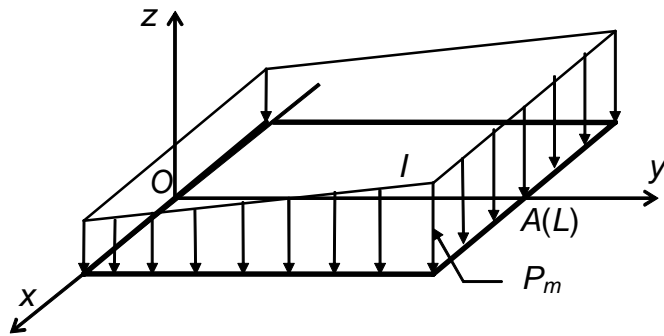
1 – Déterminer le centre d'inertie du secteur circulaire d'angle  $2\alpha$  d'une couronne de rayon intérieur  $r$  et de rayon extérieur  $R$ , supposée homogène.



2 – Déterminer la position du centre d'inertie de la surface hachurée  $ABC$ , la courbe  $AB$  étant un quart de cercle de rayon  $R$ .

**Exercice n°5** Dalle de béton

<sup>1</sup> C'est Euler qui a introduit le terme de centre d'inertie à la place de celui de centre de gravité.



Soit une surface plane rectangulaire subissant une répartition surfacique  $\vec{P}$  constante suivant  $\vec{x}$  telle que :

$$\vec{P} = -\left(P_m \frac{y}{L} + P_0\right) \vec{z}$$

- 1 – Calculer le torseur en O représentant cette action répartie.
- 2 – Déterminer la position I du glisseur équivalent à cette répartition.

### Exercice n°6 Limiteur de couple

Le dessin d'ensemble en annexe 1 représente un limiteur de couple monté entre un élément moteur et un élément récepteur. En cas de couple important requis au niveau du récepteur, le limiteur de couple permettra un mouvement relatif arbre moteur/récepteur évitant ainsi un échauffement du moteur.

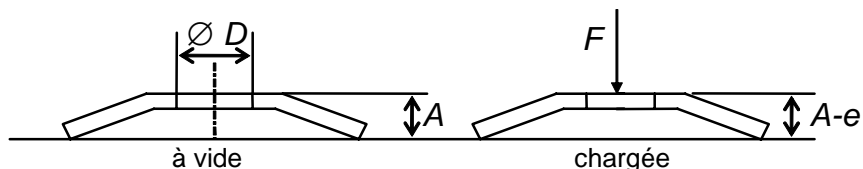
Comme un embrayage, un limiteur de couple transmet un couple maximal. Ce couple maximal est fixé par le réglage de la pression exercée sur le plateau 3 en serrant les écrous 6.

#### Constitution du limiteur de couple

- 1 – Plateau d'entrée portant 2 disques d'antifricition lié à l'arbre moteur,
- 2 – Plateau de sortie en fonte lié à l'arbre récepteur,
- 3 – Plateau de pression en fonte,
- 4 – Vis de pression,
- 5 – Rondelles élastiques au nombre de 4 par boulon presseur
- 6 – Ecrou Hm au nombre de 4.

#### Comportement des rondelles élastiques type « Belleville ».

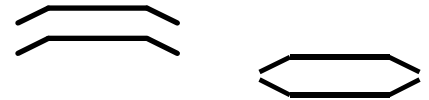
Ces éléments sont des ressorts coniques chargés axialement. Ils permettent de réaliser des ressorts peu encombrants sous de fortes charges.



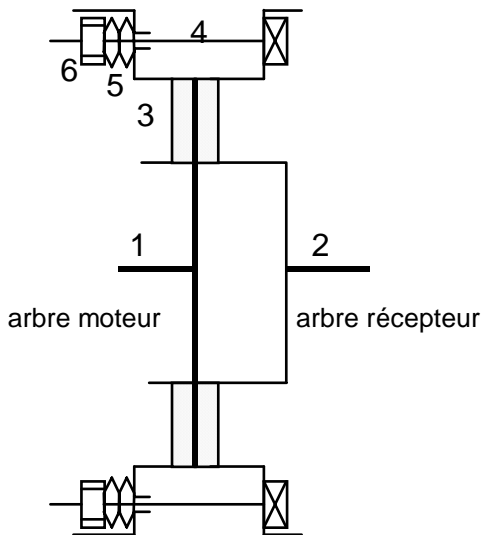
L'écrasement e d'une rondelle est sensiblement proportionnel à la charge F qui le provoque.

#### Groupement de deux rondelles élastiques

- en parallèles : une charge  $F$  provoque un écrasement  $e/2$
- en opposition : une charge  $F$  provoque un écrasement  $2e$



### Schéma technologique du limiteur de couple



#### Données

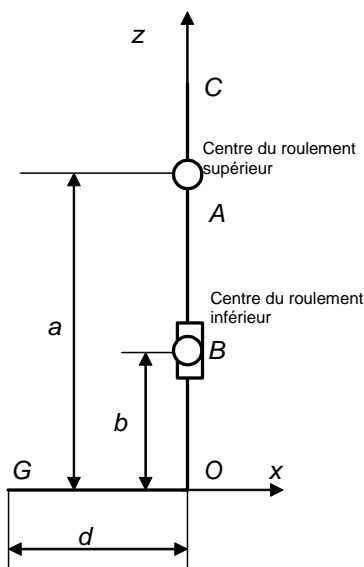
- chaque vis de pression porte 4 rondelles élastiques montées en opposition,
- diamètre d'une rondelle 8 mm donnant un écrasement de 0,4 mm, sous une charge  $F = 750$  N,
- Vis 4, M8 pas = 1,25 mm,
- disques d'antifriction  
 $d$  intérieur  $d = 2r = 70$  mm  
 $d$  extérieur  $D = 2R = 100$  mm
- facteur de frottement fonte/antifriction  $f = 0,4$ .

#### Étude à réaliser

1 – Calculer le couple maximal transmissible par le limiteur en fonction de  $f$ ,  $p$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $N$  (nombre de boulons presseurs),  $n$  nombre de tours de serrage des écrous 6 (rq : le serrage commence avec l'écrasement des rondelles).

2 – Application numérique. En plus des données ci-dessus, prendre  $N = 4$  et  $n = 1,5$ .

### Exercice n°7 Gouvernail



On propose l'étude de l'équilibre d'un gouvernail (voir dessins en annexe 2) afin d'en déduire les efforts équilibrés par chacun des roulements et le couple appliqué à la partie supérieure lors de l'orientation du gouvernail conduisant au changement de cap du navire.

On propose ci-contre une modélisation simplifiée permettant un calcul simple.

Bilan des actions mécaniques sur le gouvernail :

- action de la pesanteur :  $\mathcal{T}(p \rightarrow G) = \underset{G}{\begin{cases} -P\vec{z} \\ 0 \end{cases}}$

- action de l'eau :  $\mathcal{T}(e \rightarrow G) = \underset{G}{\begin{cases} F\vec{y} \\ 0 \end{cases}}$

- action de la coque sur la mèche du gouvernail :

$$\begin{aligned} \text{en A : } T_A(c \rightarrow G) &= \begin{cases} \vec{R}_A = X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ 0 \end{cases} && \text{modélisation rotule} \\ \text{en B : } T_B(c \rightarrow G) &= \begin{cases} \vec{R}_B = X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} \\ 0 \end{cases} && \text{modélisation linéaire annulaire} \end{aligned}$$

– commande de la rotation du gouvernail :  $T(m \rightarrow G) = \begin{cases} 0 \\ C\vec{z} \end{cases}$

1 – Déterminer les inconnues du problème

2 – Application numérique :

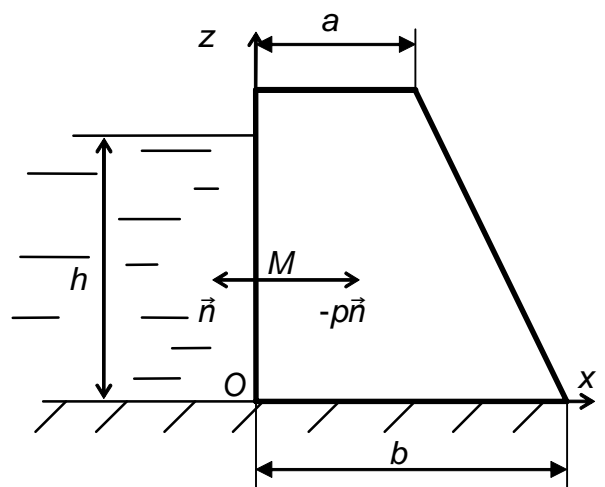
$$P = 25\,000 \text{ N} \quad F = 300\,000 \text{ N} \quad d = 500 \text{ mm} \quad a = 2,5 \text{ m} \quad b = 1 \text{ m}$$

2.1 – Justifier la différence de dimensions des roulements

2.2 – L'effort axial équilibré par le roulement A se répartit uniformément sur 6 vis à téton. Déterminer l'effort équilibré par chacune des vis. Le téton ayant un diamètre de 30 mm : déterminer la pression de contact vis/bague de roulement en supposant la répartition uniforme.

### Exercice n°8 Barrage poids

Le barrage poids ci-contre est réalisé en béton (de masse volumique  $\rho_b$ ) et a pour fonction de retenir un grande quantité d'eau (de masse volumique  $\rho_e$ ) pour une centrale électrique. Ce barrage cylindrique de section trapézoïdale comme le précise la figure repose sur un massif supposé infiniment rigide.



1 – Déterminer le torseur représentatif de l'action de l'eau sur la paroi verticale. Préciser le centre de poussée.

2 – Après avoir utilisé le PFS, déterminer la position  $l$  du point d'application de la résultante des actions exercées par le sol sur le barrage. Préciser la condition vérifiée par le coefficient de frottement  $f$  béton/massif.

3 – Application numérique :  $\rho_b = 2500 \text{ kg m}^{-3}$   $a = 5 \text{ m}$ ,  $b = 20 \text{ m}$ ,  $h = 30 \text{ m}$

### Exercice n°9 Train épicycloïdal

Au bâti 0 est associé le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Le pignon 1, de rayon  $r_1$ , est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ .

On lui attache le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose :  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$

Le bras 2 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{x}_0)$ . Le repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à 2. On pose :  $\vec{BA} = a\vec{x}_0 + L\vec{y}_2$  et  $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .

La roue à denture intérieure 3, de rayon  $r_3$  est liée à 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{x}_0)$ . Le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié à 3. On pose :  $\gamma = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

Le pignon 4, de rayon  $r_4$ , est liée à 2 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(A, \vec{x}_0)$ . Le repère  $R_4(B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est lié à 4. On pose :  $\psi = (\vec{y}_2, \vec{y}_4)$ . Ce pignon roule sans glisser au point  $I$  sur le pignon 1 et au point  $J$  sur le pignon 2. En ces points, on a :

$$\mathcal{T}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} T_{14}(\varepsilon_1 \sin \varphi \vec{y}_2 + \varepsilon_2 \cos \varphi \vec{z}_2) \\ 0 \end{cases}_I$$

$$\mathcal{T}(3 \rightarrow 4) = \begin{cases} T_{34}(\varepsilon_3 \sin \varphi \vec{y}_2 + \varepsilon_4 \cos \varphi \vec{z}_2) \\ 0 \end{cases}_J$$

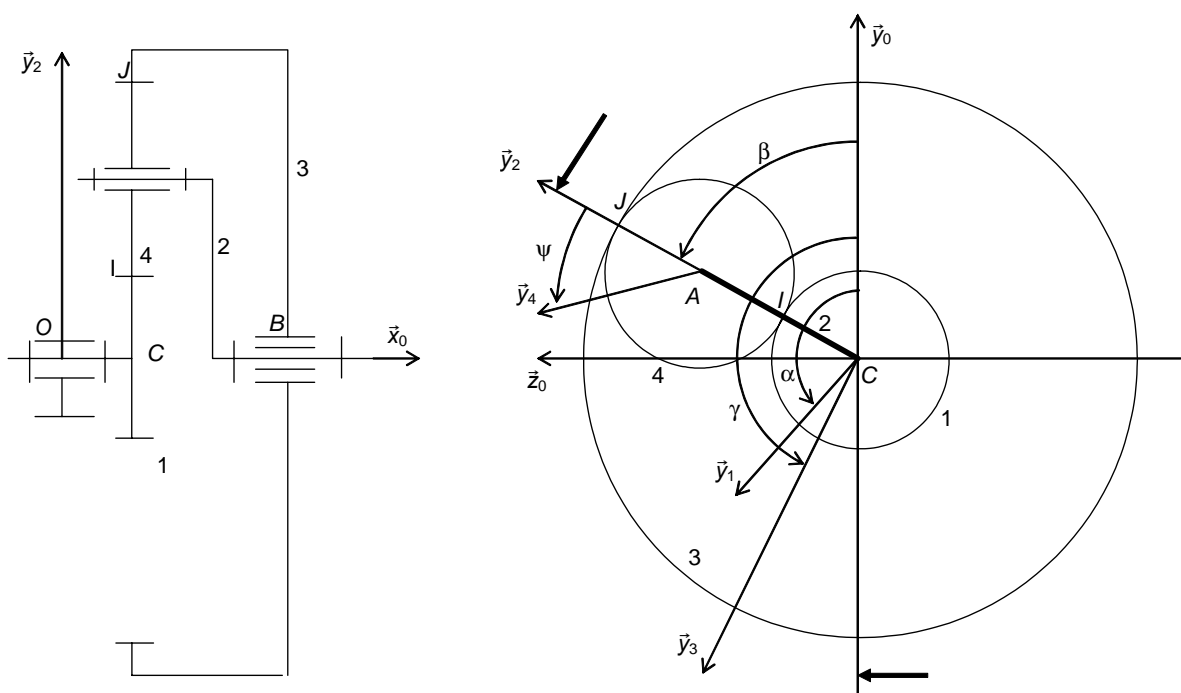
avec

$$\varphi = 20^\circ \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \quad \varepsilon_3 = \pm 1, \quad \varepsilon_4 = \pm 1$$

Les effets dus aux masses des éléments sont négligés devant les autres actions extérieures. L'action mécanique connue est caractérisée par :  $\mathcal{T}(e \rightarrow 1) = \begin{cases} 0 \\ N_1 \vec{x}_0 \end{cases}_O$ .

Et l'on a :  $\mathcal{T}(e \rightarrow 2) = \begin{cases} 0 \\ N_2 \vec{x}_0 \end{cases}_O$        $\mathcal{T}(e \rightarrow 3) = \begin{cases} 0 \\ N_3 \vec{x}_0 \end{cases}_O$

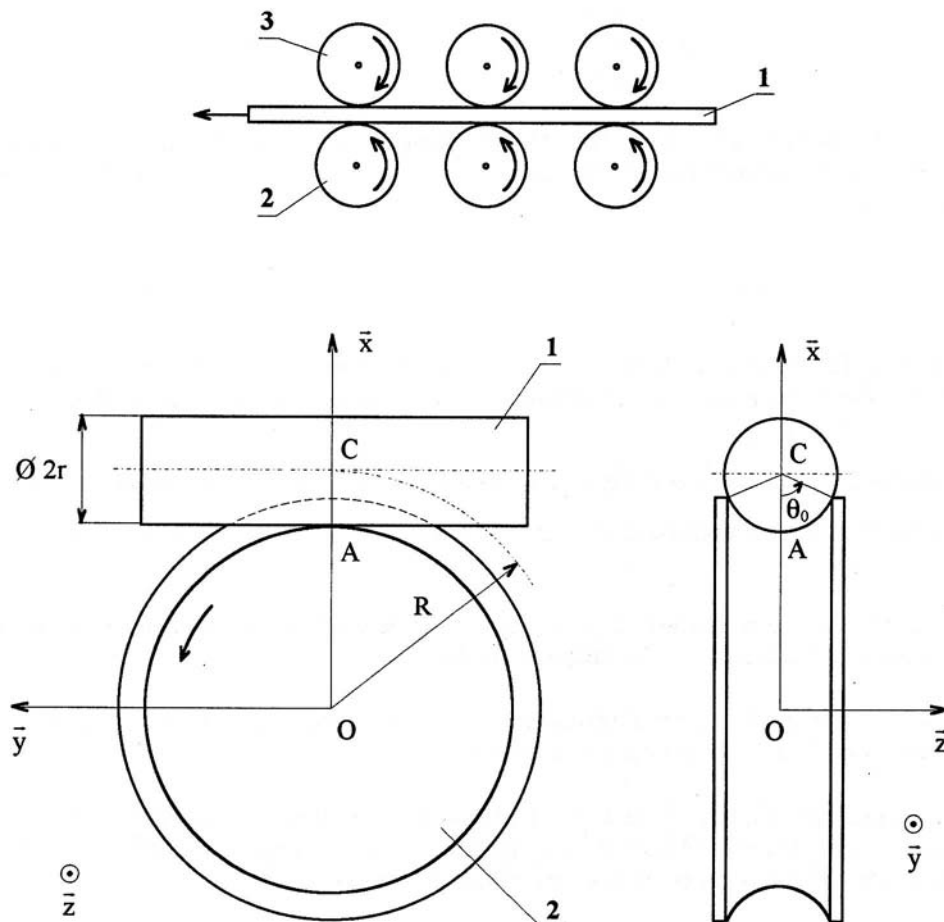
On suppose que le problème peut être traité dans le plan  $(C, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le système est à l'équilibre statique.



- 1 – Caractériser les liaisons
- 2 – Etablir une relation entre  $N_1$ ,  $N_2$ , et  $N_3$ .
- 3 – Déterminer les différentes actions mécaniques.

Exercice n°10 Système d'entraînement d'un câble par poulies

On considère un système d'entraînement d'un câble 1 par un ensemble de trois couples de poulies, telles que 2 et 3 qui pincent le câble pendant leur mouvement de rotation, de façon à obtenir le mouvement de translation rectiligne du câble (voir figure).



$R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est un repère lié au bâti 0. Le plan  $(O, \bar{x}, \bar{y})$  est plan de symétrie du mécanisme.

La poulie 2 et le bâti 0 ont une liaison pivot d'axe  $(O, \bar{z})$ . Le mouvement de rotation de la poulie 2 par rapport au bâti 0 est défini par le torseur cinématique :

$$\mathcal{V}(2/0) = \begin{cases} \Omega \bar{z} \\ 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega > 0.$$

La gorge de la poulie a la forme d'un tore de rayon moyen  $R$ , de section circulaire de rayon  $r$  limité par le secteur circulaire d'angle  $2\theta_0$ .

Le câble 1 est assimilé à un cylindre de révolution de rayon  $r$ , d'axe  $(C, \vec{y})$  tel que  $O\vec{C} = R\vec{x}$ . Le mouvement de translation rectiligne du câble 1 par rapport au bâti 0 est défini par le torseur cinématique :

$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{cases} 0 \\ \vec{V}_C \end{cases} \quad \text{avec } V > 0.$$

Le câble 1 et la poulie 2 sont en contact avec frottement (facteur  $f$ ) suivant un arc de cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$  du plan  $(O, \vec{x}, z)$ . On note  $A$  le point de contact situé sur l'axe  $(O, \vec{x})$ .

Questions :

1 – Déterminer l'axe instantané de rotation du mouvement plan sur plan de la poulie 2 par rapport au câble 1. On notera  $I$  le CIR situé dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .

Entre quelles limites peut varier le rapport  $\frac{V}{\Omega}$  pour qu'il y ait roulement sans glissement en un ou deux points de l'arc de contact entre 1 et 2 ? Cette condition est supposée satisfaite par la suite.

2 – déterminer, dans le mouvement de 2 par rapport à 1, le vecteur vitesse de glissement d'un point  $M$  de l'arc de contact entre le câble et la poulie.

Représenter graphiquement l'évolution du vecteur vitesse de glissement en fonction de la distance du point  $M$  à l'AIR.

3 – Dans l'action mécanique de 1 sur 2, on suppose la pression linéique de contact uniforme. Représenter graphiquement l'évolution de la densité linéique tangentielle des forces de contact en fonction de la distance du point  $M$  à l'AIR.

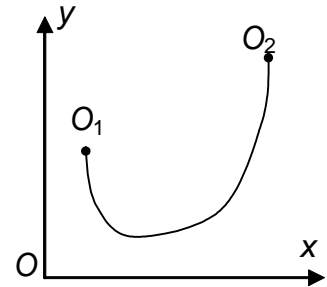
4 – Déterminer, au point  $C$ , le torseur d'action mécanique de câble 1 sur la poulie 2.

5 – En déduire, au point  $C$ , le torseur d'action mécanique du câble 1 sur les poulies 2 et 3.

6 – Tracer le graphe représentant la variation de l'opposée de la résultante du torseur d'action mécanique du câble 1 sur les poulies 2 et 3 en fonction de la position du CIR.

Exercice n°11 Chaînette

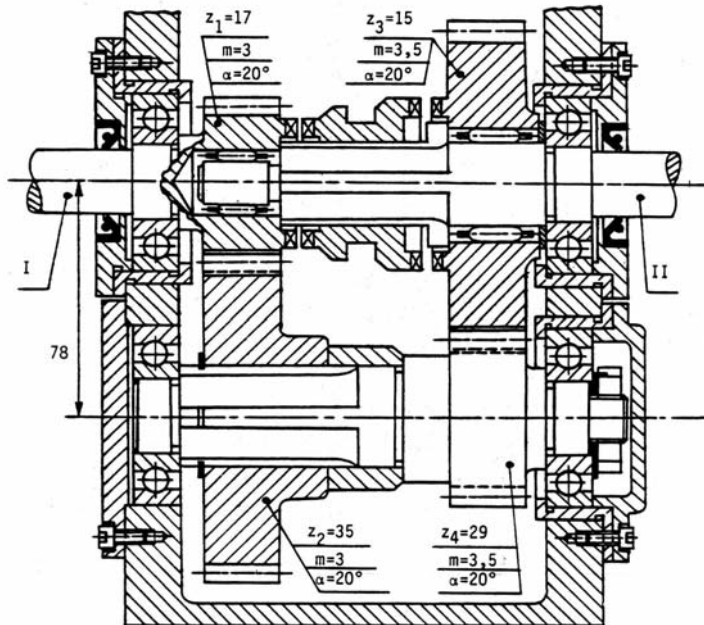
Trouver la forme d'un fil homogène, parfaitement souple, de section uniforme, en équilibre sous l'action de son poids et des actions des points de fixation  $O_1$  et  $O_2$  des extrémités. La masse linéique sera notée  $\mu$ .



Exercice n°12 Boîte de vitesse

La figure ci-après représente une partie d'une boîte de vitesses à crabot. L'actionneur est accouplé à l'arbre I, et le récepteur est accouplé à l'arbre II.

On étudie ici, l'arbre intermédiaire comportant un pignon arbré (à droite) et un pignon encastré par cannelures, épaulement et anneau élastique. Cet arbre est en liaison



pivot par l'intermédiaire de deux roulements à contact radial.

La puissance transmise par la boîte est de 920 W et l'arbre d'entrée tourne avec un taux de rotation  $N_1 = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

- 1 – Déterminer les taux de rotation possibles de l'arbre II.
- 2 – Déterminer les torseurs des actions transmises au niveau des roulements à billes réalisant la liaison pivot de l'arbre intermédiaire.

Exercice n°13 Montage d'usinage

L'étude porte sur la phase de serrage. Lorsque l'huile arrive sous pression en X, les deux tiges 6 du vérin s'écartent. Par l'intermédiaire des biellettes 4, les tiges 3 descendent, entraînant les brides 2 qui serrent les pièces 1 en E et E'.

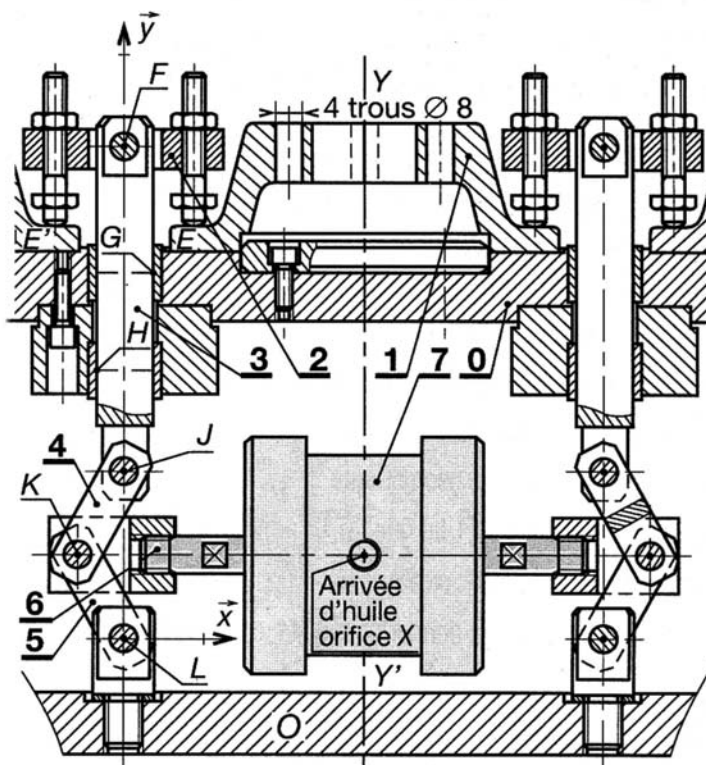
On donne :

- l'action de 2 sur 3 :  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} 3000\vec{y} \\ 0 \end{cases}$
- l'action de 4 sur 3, réductible en J a un glisseur dirigé selon KJ.
- Les actions de 0 sur 3, réductibles à des glisseurs en G et H. A l'équilibre strict :

$$\mathcal{T}_G(0 \rightarrow 3) = \begin{cases} \|\vec{G}_{03}\|(-\cos\varphi\vec{x} + \sin\varphi\vec{y}) \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_H(0 \rightarrow 3) = \begin{cases} \|\vec{H}_{03}\|(\cos\varphi\vec{x} + \sin\varphi\vec{y}) \\ 0 \end{cases}$$

avec  $f = \tan\varphi = 0,1$

On demande de déterminer les actions  $\vec{J}(4/3)$ ,  $\vec{G}(0/3)$ ,  $\vec{H}(0/3)$



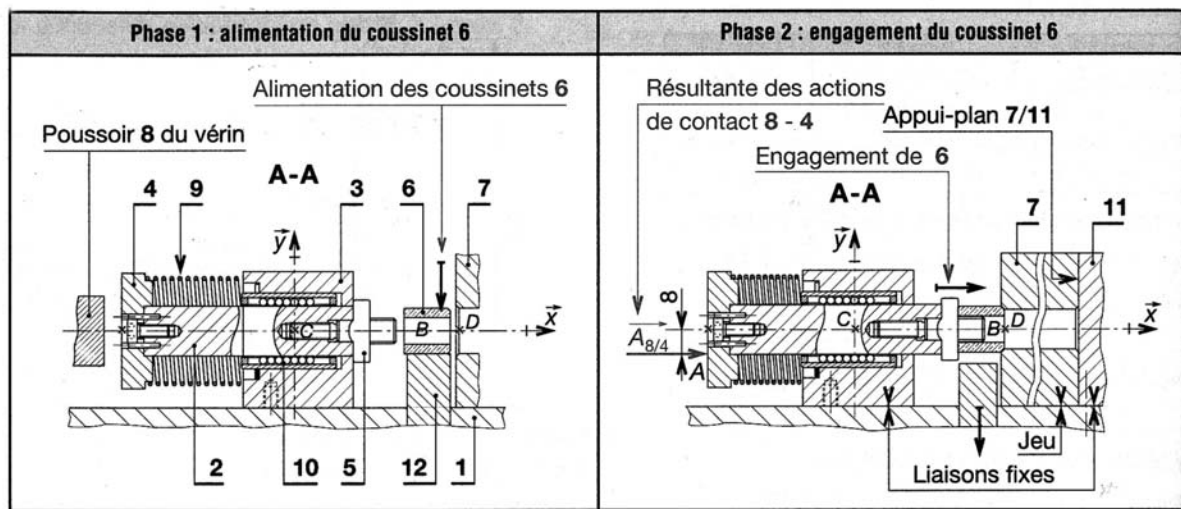
#### Exercice n°14 Montage automatisé de coussinets

Le plan ci-après représente un poste de montage automatisé de coussinets frittés 6 dans le solide 7. Le coussinet 6 est positionné sur le vé 12 et le sous-ensemble  $S = \{2,4,5,6\}$ , guidé dans la noix 3 par une douille à billes réglable 10, est déplacé vers la droite par le poussoir 8 du vérin.

On suppose que :

- il existe un plan de symétrie  $(C, \vec{x}, \vec{y})$  pour la géométrie et les efforts ;
- la liaison 2/3 est parfaite ;
- il existe des défauts de parallélisme entre la face du poussoir 5 et celle du flasque 4 ;
- l'effort du ressort de rappel 9 est négligé, ainsi que les poids propres des pièces,
- il n'y a pas de contact axial 5/3 à l'équilibre ;
- la liaison 7/11 est une liaison appui plan qui permet l'auto centrage de 7 sur 6 au montage. Le torseur d'action mécanique de 7/6 est réductible en  $D$  à un glisseur dont la résultante  $\vec{R}_D(7/6)$  est dirigée selon l'axe  $(C, \vec{x})$  au moment de l'entrée en contact de 7 avec 6.

On donne :



La résultante des actions de contact 8/4 :  $\vec{R}_A(8/4) = 9000\vec{x}$  (N). Les défauts de parallélisme existent. On adopte un modèle linéaire tel que le point d'application de cette résultante soit sur le point A situé à 8 mm sous l'axe  $(C, \vec{x})$ .

On demande :

Calculer les composantes des éléments de réduction de  $\{T_C(3/(S))\}$  en C, centre de liaison 2/10 lorsque 6 entre en contact avec 7.

### Exercice n°15 Champs de glisseurs

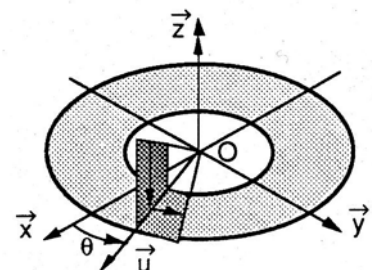
L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , un point M est tel que :

$$r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$$

Un champ de glisseurs est défini en tout point M par :

$$\vec{V}(M) = k\sqrt{x^2 + y^2} \vec{z}$$

Un second champ de glisseurs  $\vec{W}(M)$  est tel que :

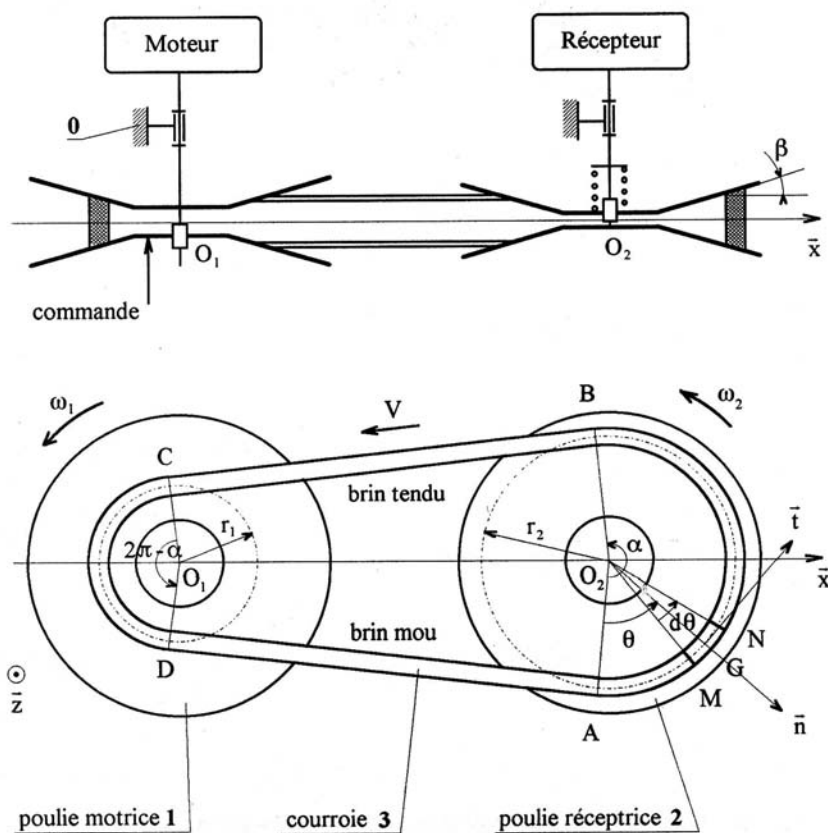


$$\vec{W}(M) \cdot \vec{z} = 0, \quad \vec{W}(M) \cdot \vec{OM} = 0, \quad \text{et} \quad \|\vec{W}(M)\| = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

- 1 – déterminer par ses éléments de réduction en  $O$  le torseur résultant du champ  $\vec{V}$ .
- 2 – déterminer par ses éléments de réduction en  $O$  le torseur résultant du champ  $\vec{W}$ .

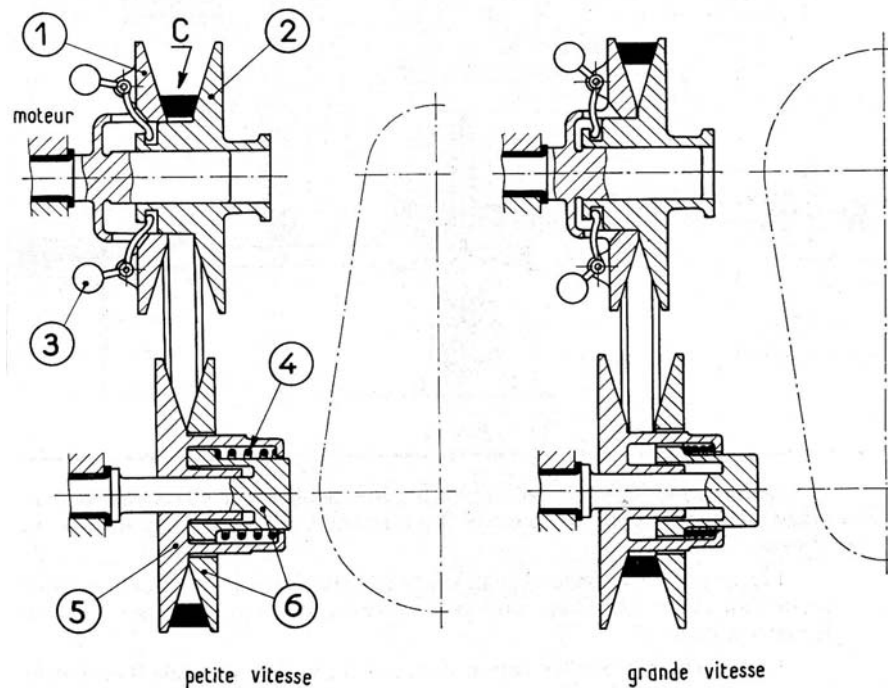
Exercice n°16 Variateur à courroie

Un variateur permet la transmission de puissance d'un arbre moteur vers un arbre récepteur en faisant varier le rapport de réduction de la vitesse de manière continue



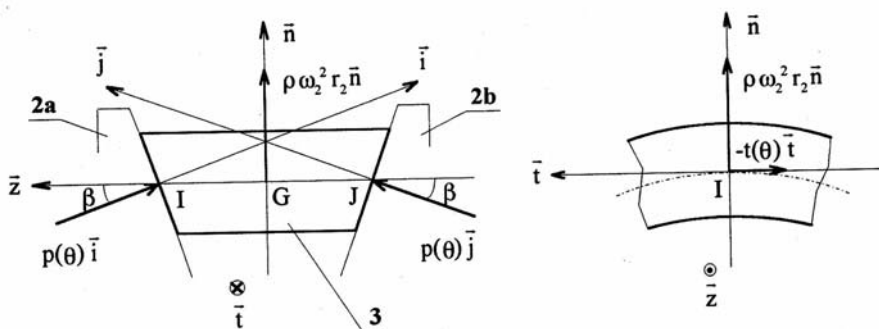
entre deux limites. Le variateur étudié comporte une poulie motrice 1, une poulie réceptrice 2 et une courroie à section trapézoïdale transmettant la fréquence de rotation. La variation de la vitesse s'obtient en réglant l'écartement des flasques des poulies, faisant ainsi varier les diamètres d'enroulement de la courroie.

Le repère  $R(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié au bâti  $0$  du mécanisme. Le plan de symétrie des poulies et de la courroie est parallèle au plan  $(O_1, \vec{x}, \vec{y})$ .



La **poulie 1** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(O_1, \vec{z})$  avec le bâti 0. On pose  $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1 \vec{z}$  avec  $\omega_1 > 0$ . L'action mécanique de l'actionneur sur l'arbre de la poulie 1 se modélise par :  $\mathcal{T}(m \rightarrow 1) = \begin{cases} 0 \\ C_1 \vec{z} \end{cases}$ , avec  $C_1 > 0$ .

La **poulie 2** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(O_2, \vec{z})$  avec le bâti 0, telle que  $O_1 \vec{O}_2 = d \vec{x}$  ( $d > 0$ ). On pose  $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2 \vec{z}$  avec  $\omega_2 > 0$ . L'action mécanique du récepteur sur l'arbre de la poulie 2 se modélise par :  $\mathcal{T}(r \rightarrow 2) = \begin{cases} 0 \\ -C_2 \vec{z} \end{cases}$ , avec  $C_2 > 0$ .



La **courroie 3** de section trapézoïdale, inextensible, de masse linéique  $\rho$ , possède des rayons moyens d'enroulement respectifs sur la poulie 1,  $r_1$  et la poulie 2,  $r_2$ . On suppose qu'il n'y a pas de glissement entre la courroie et les poulies. Les angles d'enroulement sont respectivement  $\widehat{CO_1D} = 2\pi - \alpha$ , sur 1 et  $\widehat{AO_2B} = \alpha$  sur 2.

L'inclinaison des flancs des flasques des poulies est notée  $\beta$  et le facteur de frottement entre une poulie et la courroie est noté  $f$ .

D'autre part, on note  $V$  la vitesse linéaire d'un point de la courroie par rapport au bâti  $0$ ,  $T$  la tension du brin tendu  $BC$  de la courroie et  $t$  la tension du brin mou  $AD$  de la courroie.

On considère une section droite de la courroie enroulée sur la poulie 2, de centre d'inertie  $G$  telle que :  $\overrightarrow{O_2G} = r_2\vec{n}$  et  $(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2G})$ .  $\vec{n}$  est le vecteur tel que  $\vec{t} = \vec{z} \wedge \vec{n}$ .

Dans la section droite repérée par l'angle  $\theta$ , l'action mécanique de la partie  $GB$  de la courroie sur la partie  $GA$  est définie par le torseur  $\mathcal{T}(\theta) = \begin{cases} \vec{F} = F(\theta)\vec{t} \\ 0 \end{cases}$ ,  $F(\theta)$

représente l'effort de traction dans la courroie.

Les actions mécaniques des flasques 2a et 2b sur les flancs de la courroie 3 sont définies par les densités linéiques de forces, au niveau du rayon d'enroulement (voir figure ci-dessus) :

$$\vec{f}_i(2a/3) = \rho(\theta)\vec{j} - t(\theta)\vec{t}, \quad \vec{f}_j(2b/3) = \rho(\theta)\vec{j} - t(\theta)\vec{t}$$

où  $\rho(\theta)$  et  $t(\theta)$  sont les densités linéiques normale et tangentielle.

On pose  $t(\theta) = k_2 \rho(\theta)$ ,  $k_2$  est le coefficient de transmission de la poulie 2, supposé constant le long de l'arc  $AB$ . Le coefficient de sécurité au glissement  $s$  ( $s > 1$ ) est tel que  $s k_2 = f$ .

Les effets d'inertie centrifuge sur la partie de la courroie enroulée sur l'arc  $AB$  sont représentés par la densité linéique de forces :  $\vec{f}_G(\theta) = \rho\omega_2^2 r_2 \vec{n}$

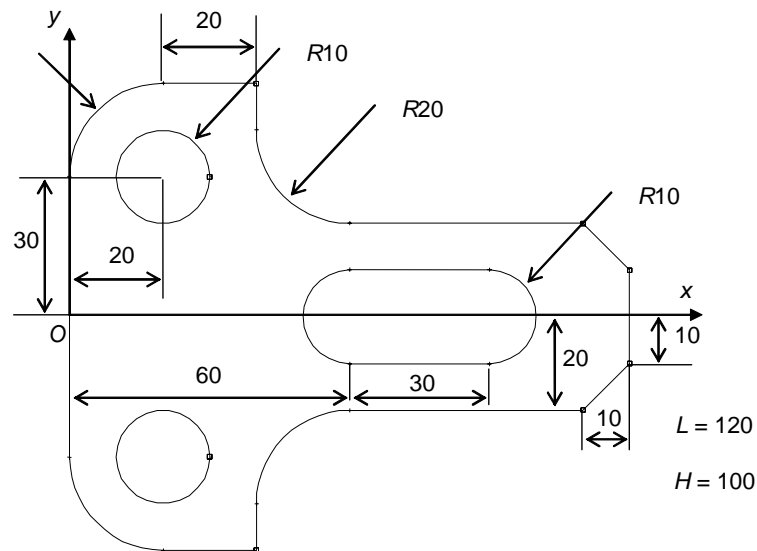
L'action de la pesanteur est négligée devant les autres actions mécaniques.

1 – En isolant l'élément  $MN$  de la courroie (voir figure précédente), de centre d'inertie  $G$ , enroulé sur la poulie 2, tel que  $(\overrightarrow{O_2M}, \overrightarrow{O_2G}) = (\overrightarrow{O_2G}, \overrightarrow{O_2N}) = \frac{d\theta}{2}$ , déterminer la relation entre les tensions  $T$  et  $t$  des brins mou et tendu de la courroie en fonction de  $k_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$  et  $V$ .

2 – Déterminer la pression linéique de contact  $p(\theta)$  entre les flasques de la poulie et la courroie. En déduire la composante axiale de la résultante d'action mécanique de la courroie sur un flasque, en fonction de  $T$ ,  $t$ ,  $\beta$  et  $k_2$ .

3 – Quelle relation y a-t-il entre les moments  $C_1$  et  $C_2$  des couples moteur et récepteur ? Lorsque  $C_1 = C_2 = 0$ , alors  $T = t = T_0$  ( $T_0$  : tension de pose de la courroie). On admet qu'en fonctionnement :  $T + t = 2T_0$ . En déduire  $T$  et  $t$  en fonction de  $C_1$ ,  $r_1$  et  $T_0$ .

4 – Sur quelle poulie apparaîtra en premier un glissement entre la courroie et la poulie ?

**Exercice n°17** Centre de gravité du plan


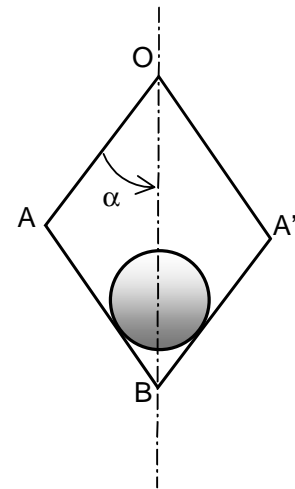
La plaque plane ci-dessus a une épaisseur de 1 mm. Elle est constituée en alliage d'aluminium et comporte deux trous circulaires et un trou oblong (voir dessin). Déterminer la position du centre de gravité de cette plaque.

**Exercice n°18** Losange articulé

Le principe de Torricelli<sup>2</sup> permet d'énoncer qu'un ensemble de masses est en équilibre lorsque son centre de gravité est le plus bas possible. Appliquer ce principe au problème ci-après.

Etudier l'équilibre d'un losange articulé pesant  $OABA'$  suspendu par un point fixe  $O$  lorsqu'on place à l'intérieur un disque homogène reposant sur les deux barres  $AB$  et  $A'B$ .

On néglige les frottements. Les quatre barres ont même longueur  $l$ , même poids  $p$ . Le disque a pour rayon  $r$  et pour poids  $q$ .



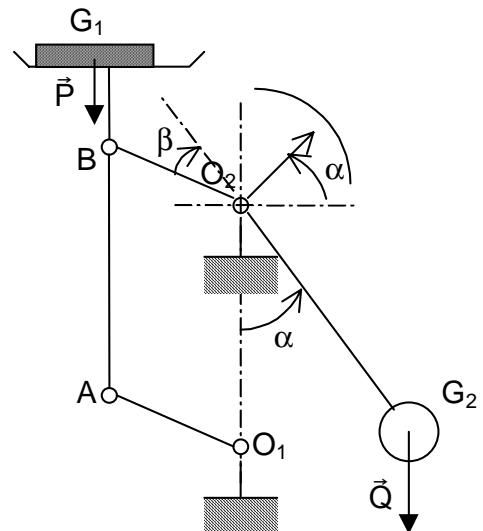
<sup>2</sup> Evangelista TORRICELLI (1608-1647) est notamment connu pour l'invention du baromètre à mercure.

**Exercice n°19** Pèse-lettres

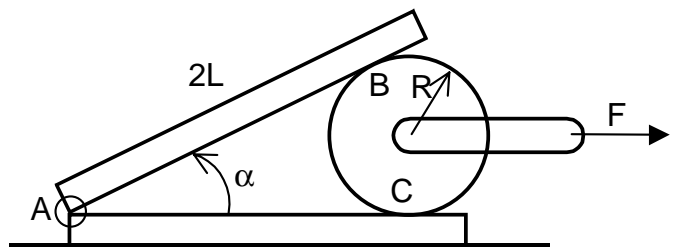
Le mécanisme est constitué comme le présente le schéma ci-contre.  $O_1$  et  $O_2$  sont des liaisons pivots fixes par rapport au support, A et B sont des liaisons pivots mobiles. Toutes ces liaisons sont supposées parfaites et les masses des tiges sont négligeables par rapport aux autres masses prises en compte.

Sous l'action du poids  $P$  de la lettre, le système prend la configuration d'équilibre repérée par l'angle  $\alpha$ . On note  $O_1A = O_2B = a$  et  $O_2G_2 = b$ .

Déterminer la valeur de  $\alpha$ .


**Exercice n°20** Maintien d'un cylindre entre deux plaques

Deux plaques carrées chacune de masse  $M_1$ , de côté  $2L$ , et d'épaisseur négligeable sont articulées sans frottement entre elles le long d'une arête commune A. Une de ces plaques est maintenue fixe horizontale, l'autre fait un angle  $\alpha$  avec la première. Un cylindre de révolution de masse  $M_2$  et de rayon  $R$ , est en contact avec ces deux plaques respectivement le long de deux génératrices B et C. En chaque contact il y a du frottement de coefficient  $f$ . Une force horizontale  $F$  est appliquée perpendiculairement à l'axe du cylindre.



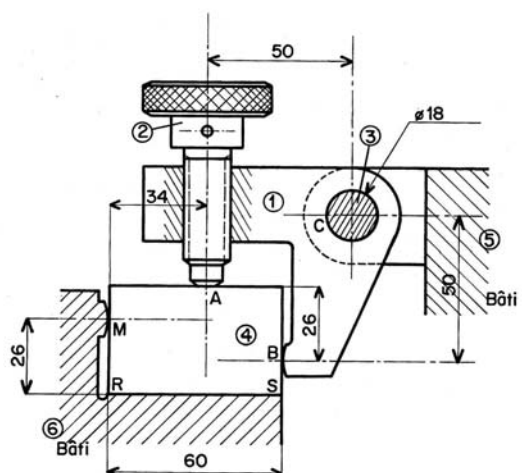
1 – Déterminer les actions de contact inconnues.

2 – Déterminer entre quelles limites peut varier la force  $F$ , le système restant immobile.

Application numérique :  $M_1 = 30$  kg,  $M_2 = 150$  kg,  $f = 0,25$ ,  $L = 1$  m,  $R = 0,25$  m.

**Exercice n°21** Dispositif d'ablocage

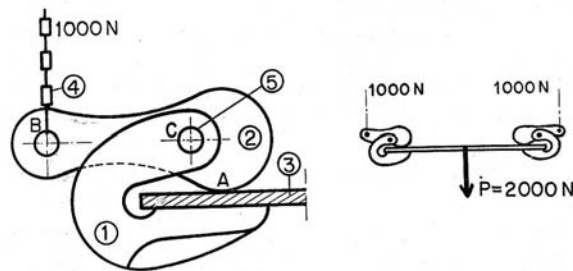
Un dispositif de blocage est constitué par une bride coudée 1, articulée sur un axe 3 fixé sur un bâti fixe 5 et dans lequel se visse une vis de pression 2. Quand le blocage de la pièce 4 est réalisé, l'action exercée par la vis sur la pièce ( $\vec{A}_{24}$ ) est de module 800 N en A. Les poids et frottements sont négligés.



- 1 – Déterminer graphiquement l'action exercée par la bride sur la pièce en  $B$ ,
- 2 – Déterminer graphiquement la résultante des actions exercées par la bride et la vis sur la pièce 4,
- 3 – La pièce repose sur un plan horizontal du bâti 6 et s'appuie latéralement en  $M$  contre ce dernier. Déterminer graphiquement la valeur des actions exercées par le bâti sur la pièce.

**Exercice n°22**    Dispositif de levage

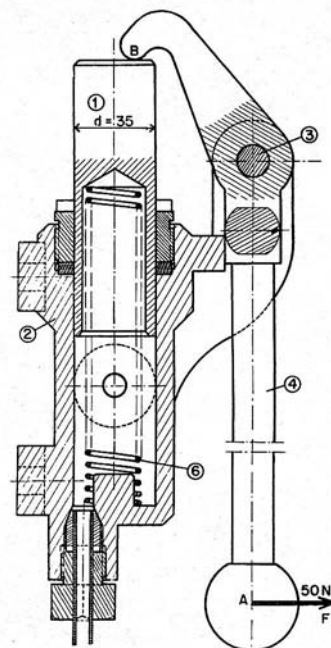
Un dispositif de levage de plaques de tôles est constitué par deux pinces symétriques données par la figure ci-contre. La plaque pèse 2000 N et l'effort de tension de la chaîne est de 1000 N. Au moment du levage, sous l'effet de la tension progressive de la chaîne 4, la pièce 1 ne glisse pas sur la tôle, tandis que la pièce 2 articulée en  $C$ , serre la tôle en  $A$  en glissant avant de prendre une position d'équilibre.



- 1 – Étudier l'équilibre de la pièce 2,
- 2 – Étudier l'équilibre de la pièce 1 et déterminer le point d'application de la résultant de contact de la tôle 3 sur la pièce 1. Le coefficient de frottement aux contacts tôle et pièces 2 et 1 est  $f = 0,2$ . Le frottement de l'axe 5 est négligé.
- 3 – D'après les résultats obtenus justifier le glissement de 2 sur la tôle 3 et le non-glissement de 1 sur la tôle 3 au moment du serrage.

**Exercice n°23**    Pompe à huile monocoup

Une pompe à huile monocoup est représenté sur le dessin ci-contre. Le ressort intérieur de compression, dans la position de fin de course (cas de la figure), exerce une action de 10 N. Le frottement du joint sur le piston est négligé. Sachant qu'on exerce au démarrage (cas de la figure), une action horizontale  $\vec{F}$  dont l'intensité est de 50 N en  $A$  (le bras de levier  $A$  à axe 3 est de 400 mm).



- 1 – Étudier l'équilibre du levier 4 sachant que le facteur de frottement au contact  $B$  est  $f = 0,1$ . L'articulation 3 étant bien graissée, le coefficient du contact de 3 et 4 est négligeable,
- 2 – Étudier l'équilibre du piston 1 et trouver,

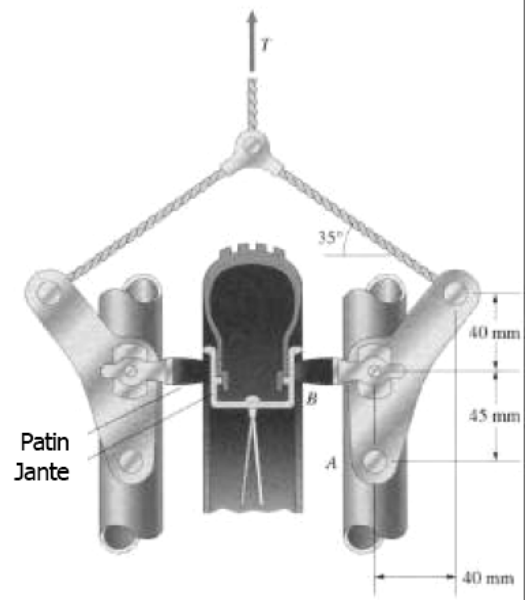
2.1 – le point d'application de la résultante des actions de contact du cylindre 2 sur le piston 1,

2.2 – la pression de l'huile,

3 – Sachant que la force du ressort augmente au fur et à mesure de son aplatissement suivant une loi linéaire de 10 N pour un aplatissement de 50 mm, préciser quelle sera la force à exercer en A lorsque le piston aura accompli une course de 30 mm. On relèvera les dimensions utiles à l'échelle du dessin.

**Exercice n°24** Freinage d'un vélo

Lors du freinage de votre vélo, vous générez une tension dans votre câble de frein  $T$  de 60 N. Calculer la force que vos patins de freins appliquent sur la jante en sachant que le point A est le pivot du frein.



**Exercice n°25** Echelle double

Une échelle double se compose de deux échelles simples  $AO$  et  $BO$  de même longueur  $L$ , de même poids  $M\vec{g}$ , articulées sans frottement au sommet commun  $O$ .

On note  $2\alpha$  l'angle au sommet des deux échelles et  $\mu$  le facteur de frottement avec le sol. Une personne  $P$ , de poids  $m\vec{g}$ , monte sur l'échelle  $AO$  à une distance  $x$  du sommet  $O$ .

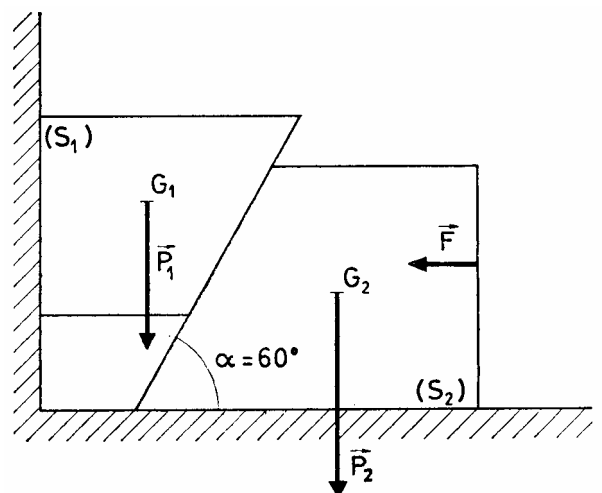
- 1 – Déterminer les efforts exercés en  $A$  et en  $B$  lorsque l'échelle est en équilibre.
- 2 – Montrer que si l'angle  $\alpha$  augmente, c'est l'échelle  $BO$  qui glissera la première.
- 3 – Discuter l'influence de  $x$  dans le cas particulier où  $m = M$ . Quel est l'angle maximale d'ouverture de l'échelle pour que la personne puisse monter jusqu'en haut sans risques ?

**Exercice n°26** Blocs en équilibre

Deux blocs  $S_1$  et  $S_2$ , de poids respectifs  $\|\vec{P}_1\| = 5500 \text{ N}$  et  $\|\vec{P}_2\| = 12500 \text{ N}$ , sont maintenus en équilibre grâce à une action mécanique  $\vec{F}$  appliquée sur  $S_2$  (voir figure).

Hypothèses :

- Les facteurs de frottement au niveau des contacts sont pris égaux à 0,25 ;
- Le problème est considéré comme plan.



1 – Déterminer graphiquement la norme minimale de  $\vec{F}$  qui maintient les blocs à la limite de l'équilibre.

2 – Déterminer graphiquement la norme maximale de  $\vec{F}$  qui maintient les blocs à la limite de l'équilibre.

*Éléments de correction*

$$\text{Exercice n}^\circ 1 : \mathcal{T}_O = \begin{cases} 14875\vec{y} + 6000\vec{z} \\ 45000\vec{x} - 30000\vec{y} + 38375\vec{z} \end{cases}$$

*Exercice n}^\circ 2 :*

$$\mathcal{T}(0 \rightarrow 3) = \begin{cases} -\frac{Mge}{b}\vec{x}_0 + \frac{Mg(d-a-c)}{d}\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases}, \mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} \frac{Mge}{b}\vec{x}_0 - Mg\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 3 : \mathcal{T}_A = \begin{cases} -2000\vec{x} + 2667\vec{y} \\ 0 \end{cases} \text{ (Nm)}, \mathcal{T}_B = \begin{cases} 7333\vec{y} \\ 0 \end{cases} \text{ (Nm)}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 4 : 1 - OG = \frac{2}{3} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha \vec{x}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 5 : \mathcal{T} = \begin{cases} \vec{R} = -\left(\frac{P_m}{2} + P_0\right)L\vec{z} \\ \vec{M}(O) = -\left(\frac{P_m}{3} + \frac{P_0}{2}\right)L^2\vec{x} \end{cases}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 6 : C = \frac{2}{3} fF \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}, C = 121 \text{ Nm}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 7 : \mathcal{T}_A = \begin{cases} \frac{d}{a-b}P\vec{x} + \frac{b}{a-b}F\vec{y} + P\vec{z} \\ 0 \end{cases}, \mathcal{T}_B = \begin{cases} -\frac{d}{a-b}P\vec{x} - \frac{b}{a-b}F\vec{y} \\ 0 \end{cases}, C=dF$$

$$\text{Exercice n}^\circ 9 : N_3 = \frac{N_1 r_3}{r_1}, N_2 = -\frac{2N_1(r_1 + r_4)}{r_1}, T_{14} = \frac{N_1}{\varepsilon_2 \cos \varphi_1}, T_{34} = \frac{N_3}{\varepsilon_4 \cos \varphi_3}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 10 : 1 - R - r \leq \frac{V}{\Omega} \leq R - r \cos \theta_0,$$

$$4 - \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} -2pr \sin \theta_0 \vec{x} + 2fpr(2\theta_1 - \theta_0)\vec{y} \\ 2fpr^2(\sin \theta_0 - 2\sin \theta_1)\vec{z} \end{cases}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 11 : y - y_0 = \frac{T_0}{\mu g} \operatorname{ch} \left( \frac{\mu g}{T} (x - x_0) \right)$$

$$\text{Exercice n}^\circ 13 : \|\vec{J}(4/3)\| = 4150\text{N}, \|\vec{G}(0/3)\| = 2150\text{N}, \|\vec{H}(0/3)\| = 4250\text{N}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 14 : \mathcal{T}_c(3/(S)) = \begin{cases} 0 \\ -72000\vec{z} \end{cases}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 15 : \mathcal{T}_v = \begin{cases} 2\pi k \frac{R^3 - r^3}{3} \vec{z} \\ 0 \end{cases}, \mathcal{T}_w = \begin{cases} 0 \\ 2\pi k \frac{R^4 - r^4}{4} \vec{z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Exercice n}^\circ 16 : \quad & 1 - \frac{T - \rho V^2}{t - \rho V^2} = \exp\left(\frac{k_2}{\sin\beta} \theta\right) \\ & 2 - A = \frac{(T - t)\cos\beta}{2k_2} \\ & 3 - \frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}, T = T_0 + \frac{C_1}{2r_1}, t = T_0 - \frac{C_1}{2r_1} \end{aligned}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 17 : x_G = 44,997\text{mm}, y_G = 0$$

$$\text{Exercice n}^\circ 18 : \text{l'angle } \alpha \text{ vérifie } qr \cos\alpha = (4p + 2q)/\sin^3\alpha$$

$$\text{Exercice n}^\circ 19 : \tan\alpha = \frac{P \sin\beta}{Qb - Pa \cos\beta}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 20 : 1 - N_1 = M_1 g \frac{L}{R} \cos\alpha \tan\frac{\alpha}{2}, N_2 = M_2 g + F \tan\frac{\alpha}{2} + M_1 g \frac{L}{R} \cos\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$T_1 = -T_2 = \frac{M_1 g \frac{L}{R} \sin\alpha \tan\frac{\alpha}{2} + F}{1 + \cos\alpha}, \quad 2 - 170\text{ N} < |F| < 430\text{ N}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 24 : F = 52,3\text{ N}$$

$$\text{Exercice n}^\circ 26 :$$

